ORTAÖĞRETİM

Matematik 11

DERS KİTABI

YAZARLAR

Mehmet MAVİŞ
Güray GÜL
Himmet SOLAKLIOĞLU
Hakan TARKU
Fatih BULUT
Mahmut GÖKŞEN

MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI YAYINLARI ....: 8897
DERS KİTAPLARI DİZİSİ ....: 1912

HAZIRLAYANLAR

Editör
Prof. Dr. Gonca AYIK

Dil Uzmanı
Gülendam KARACA ÇETİN

Program Geliştirme Uzmanı
Hasan NASIRCI

Ölçme ve Değerlendirme Uzmanı
Hüseyin BÜYÜKBİÇER

Rehberlik ve Gelişim Uzmanları
Tuğba GÜL ŞEN

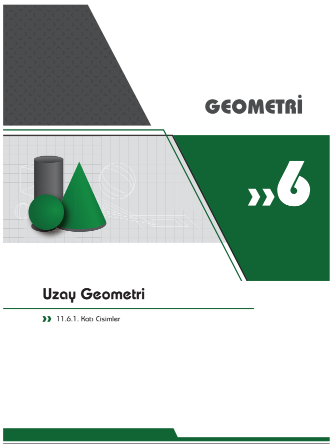
Görsel Tasarım Uzmanı
Taykut CENGİZ

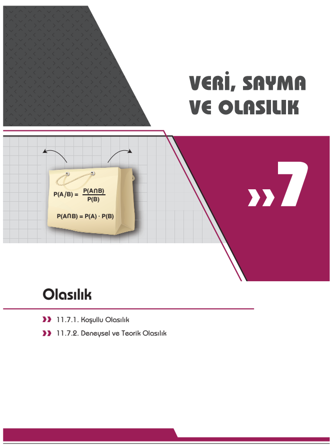
Grafik Tasarım Uzmanı
Volkan NUR

ISBN 978-975-11-6785-9

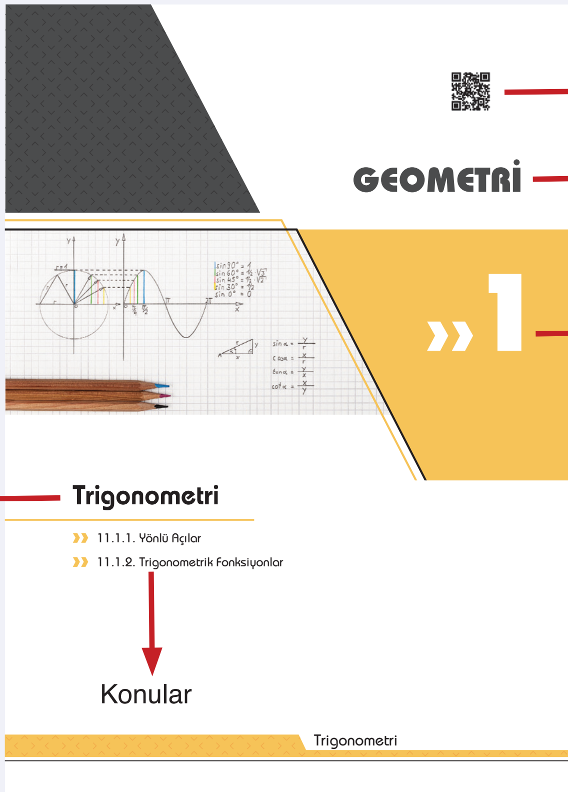
Millî Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulunun 25.07.2018 tarihli ve 99 sayılı kararı ile ders kitabı olarak kabul edilmiştir.

İÇİNDEKİLER


GEOMETRİ
»6
Uzay Geometri
11.6.1. Katı Cisimler


VERİ, SAYMA VE OLASILIK
»7
Olasılık
11.7.1. Koşullu Olasılık
11.7.2. Deneysel ve Teorik Olasılık

KİTABIN TANITIMI



Resim, video, animasyon vb. kaynaklara ulaşılan bölümdür.

Öğrenme alanıdır.

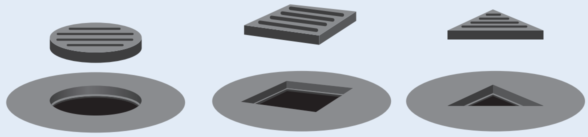
Alt öğrenme alanının numarasıdır.

Alt öğrenme alanıdır.

Konular

Hazırlık Çalışması

1.



Bir belediye, yağan yağmur sularının cadde üstünde fazla birikmemesi için belirli aralıklarla kanalizasyon girişlerine rögar kapakları koymayı planlıyor. Yukarıda belediyenin yaptıracağı üç kapak şekli verilmiştir. Bu kapaklardan hangisinin bulunduğu rögarın içine kesinlikle düşmeyeceğini bulunuz..

Alt öğrenme alanıyla ilgili önceki bilgileri içeren soruların bulunduğu bölümdür.

Terim ve kavramların bulunduğu bölümdür.

Terimler ve Kavramlar	Sembol ve Gösterimler
• Koşullu Olasılık • Bağımlı Olay • Bağımsız Olay • Bileşik Olay	• $P(A\|B)$ • $P(A \cap B)$ • $P(A \cup B)$

Sembol ve gösterimlerin bulunduğu bölümdür.

Hangi kazanımların öğrenileceğinin sıralandığı bölümdür.

Neler Öğreneceksiniz?

- Yönlü açıyı kavramayı,
- Açı ölçü birimlerini açıklayarak birbiri ile ilişkilendirmeyi,
- Bir açının trigonometrik oranlarını birim çember yardımıyla hesaplamayı öğreneceksiniz.

Bilgi

- Tek fonksiyon grafikleri orijine göre simetriktir.
- Çift fonksiyonların grafikleri y eksenine göre simetriktir.

Tanım, teorem ve bilgilerin verildiği bölümdür.

Formül ve ipuçlarının verildiği bölümdür.

İpucu

A olayı B olayından bağımsız ise B' olayından da bağımsızdır. Dolayısıyla B olayının gerçekleşmesi A olayını etkilemiyorsa B olayının gerçekleşmemesi de A olayını etkilemez.

Sıra Sizde

$\left.\begin{aligned} x^2+3y^2+2x-11&=0 \\ x-y&=1 \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini cebirsel yolla bulup grafik yardımıyla yorumlayınız.

Öğrenilenlerin pekiştirilmesi amacıyla sorulara yer verilen bölümdür.

Bilim insanlarının hayatlarının ve çalışmalarının tanıtıldığı bölümdür.

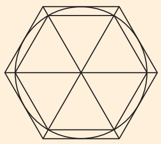
Bilim İnsanları

Archimedes (Arşimet) (MÖ 287 – MÖ 212)

Temsilî Archimedes

Bir dairenin çevresinin çapına oranının bulunması üzerine yaptığı değerlendirmelerle Arşimet, hesaplama konusunda nasıl bir yetenek olduğunu bir kez daha kanıtlamıştır. Dairenin içine ve dışına çizilen düzgün altıgenlerden yola çıkmış, daire çevresinin bu iki çok genin çevrelerinin arasında bir değer olduğunu kanıtlamak amacıyla, Arşimet algoritması olarak da bilinen yöntemle kenarları sürekli ikiye bölmüş, sonuçta doksan altı kenarlı iki çokgen oluşturmuştur. P_n'in dışa, P_n'in içe çizilen n kenarlı çokgenlerin çevreleri olduğu varsayımıyla P, Pn, $P_n, P_n, P_{2n}, P_{2n}, P_{4n}, P_{4n}, ...,$ dizisi tanımlanabilir. Üçüncüden başlayarak izleyen terimler, bir öncekilerin aritmetik ve geometrik ortalamaları alınarak bulunabilmektedir.

Bunu, $P_{2n}=2_{pn}P_n/(p_n+P_n),\ p_{2n}=\sqrt{p_nP_n}$ vb demektir. İstenirse $a_n, A_n, a_{2n}, A_{2n}, ...$ dizisi de kullanılabilir; burada a ve A içe ve dışa çizilen n kenarlı çokgenlerin alanıdır. Üçüncü ve izleyen terimler yine bir önceki değerlerin aritmetik ve geometrik ortalamaları alınarak bulunabilmektedir. Örneğin, $a_{2n}=\sqrt{a_n,\ A_{2n}}=2A_na_{2n}/(a_n+A_{2n})$ vb. gibi. Çokgenlerin çevresini bulurken kullandığı karekök alma ve geometrik ortalama hesaplama yöntemi Babillilerin yöntemine çok benzemektedir. Arşimet'in daire hesaplarında p değeri, $3\frac{10}{71}<p<3\frac{10}{70}$ eşitsizliğiyle ifade edilmektedir ki bu, Babil ve Mısır kestirimlerinden çok daha doğru bir değerdir. (Her şeye karşın unutmamamız gereken bir başka tarihi gerçek de, ne Arşimet'in ne de antik Yunan matematikçilerinden herhangi birinin daire çevresinin çapa oranını günümüzde kullanıldığı biçimiyle bir p değeri ile tanımladığıdır.) Bu değer, Arşimet'in Ortaçağda pek moda eserlerinden biri olan Dairenin Ölçümü Üzerine adlı bilimsel incelemenin 3. önermesinde verilmektedir. Bu kısa çalışma yalnızca üç önermeden oluşmaktadır ve büyük olasılıkla günümüze özgün eserden daha kısalmış bir biçimde ulaşmıştır. Bu üç önermeden biri tüketme yöntemi kullanılarak yapılan ve bir kenarı dairenin



Arşimet'in daire çevresi bulmaya yönelik çalışması

Buluyorum

Aşağıdaki şekilde $d_1 \perp d_2$ ve d_1, d_2 doğrularının x ekseni ile pozitif yönde yaptıkları açılar sırasıyla β ve α olmak üzere bu doğruların eğimleri sırasıyla $m_1=\tan\beta$ ve $m_2=\tan\alpha$ olsun.

Formül ve ipuçlarının doğruluğunun gösterildiği bölümdür.

Örneklerin bulunduğu bölümdür.

Örnek

Ölçüsü $1420'$ olan bir açıyı derece ve dakika cinsinden yazınız.

Çözüm

1 derece 60 dakikaya eşit olduğundan 1420 sayısı 60 a bölünür. Elde edilen bölüm derece, kalan ise dakika cinsinden yazılır.

Örneklerin çözümlerinin bulunduğu bölümdür.

Alıştırmaların bulunduğu bölümdür.

ALIŞTIRMALAR

1. $A=7\cdot\sin^2x-11$ olduğuna göre A nın alabileceği kaç farklı tam sayı değeri olduğunu bulunuz.

2. $a=\sin305°$,
$b=\cos212°$,

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 2

A) Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerlere doğru ifadeyi yazınız.

1. İki doğru birbirine dik ise eğimleri çarpımı .....olur.

2. İki doğru birbirine paralel ise eğimleri birbirine .... olur.

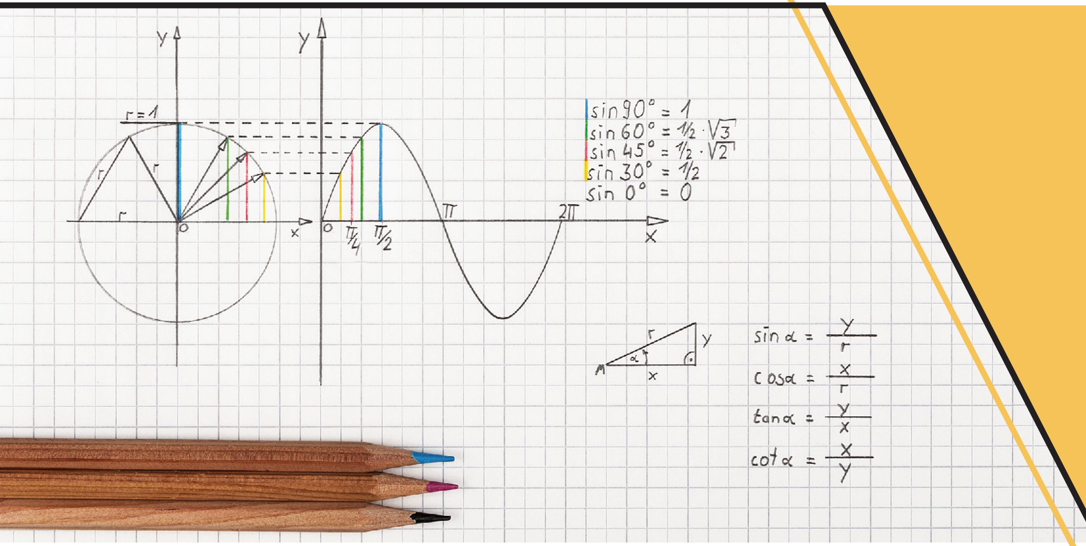
Ölçme ve değerlendirme sorularının bulunduğu bölümdür.

SEMBOL VE GÖSTERİMLER

$^\circ$	: Derece
$'$	: Dakika
$''$	: Saniye
R	: Radyan
sinx	: x değerinin sinüsü
cosx	: x değerinin kosinüsü
tanx	: x değerinin tanjantı
cotx	: x değerinin kotanjantı
cosecx	: x değerinin kosekantı
secx	: x değerinin sekantı
arcsinx	: x değerinin arksinüsü
arccosx	: x değerinin arkkosinüsü
arctanx	: x değerinin arktanjantı
arccotx	: x değerinin arkkotanjantı
T	: Periyot
f(x+T)	: Periyodik fonksiyon
$A(x, y)$	: A noktası
$\|AB\|$	: AB uzunluğu
m	: Eğim
$d_1 \parallel d_2$	: İki doğrunun paralelliği
$d_1 \perp d_2$	: İki doğrunun dikliği
$y = ax^2 + bx + c$	: İkinci dereceden fonksiyon
$y = a \cdot (x - r)^2 + k$	: Tepe noktası bilinen parabol
$y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$	: x eksenini kestiği noktaları bilinen parabol
r	: Bir çemberin yarıçapı
R	: Bir üçgenin çevrel çemberinin yarıçapı
$\overset{\frown}{AB}$	: AB yayı
$\overset{\frown}{ABC}$	: ABC yayı
$m(\overset{\frown}{AB})$	: AB yayının ölçüsü
π	: Pi
$P(A / B)$	: A olayının B olayına koşullu olasılığı
$P(A \cap B)$	: A ve B olaylarının olasılığı
$P(A \cup B)$	: A veya B olaylarının olasılığı

GEOMETRİ

1



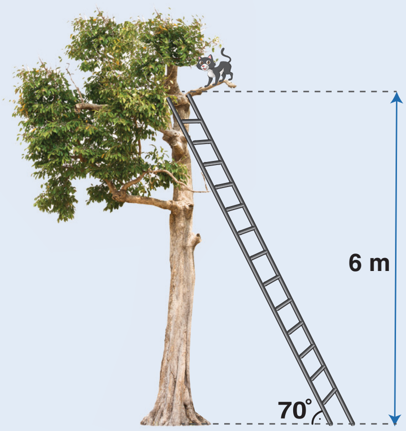
Trigonometri

- 11.1.1. Yönlü Açılar
- 11.1.2. Trigonometrik Fonksiyonlar

11.1. TRİGONOMETRİ

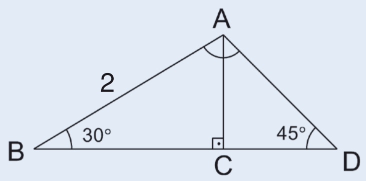
Hazırlık Çalışması

1.



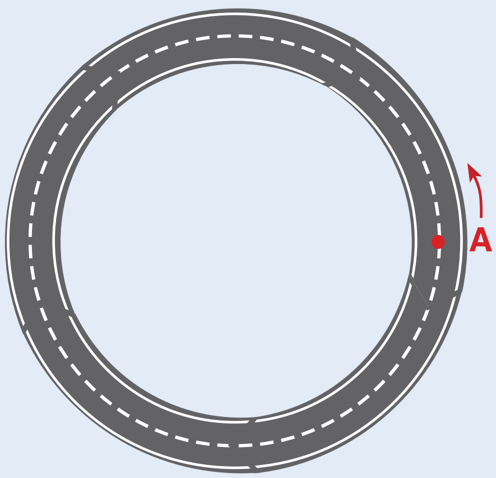
Ağaca tırmanan kediyi kurtarmak için yer düzlemiyle 70 derecelik açı oluşturacak şekilde ağaca merdiven dayanıyor. Kedinin bulunduğu dalın yerden yüksekliği 6 metre olduğuna göre merdivenin boyunun yaklaşık değerinin kaç metre olduğunu bulunuz ($\sin(70^\circ) \approx 0,94$).

2. Aşağıdaki şekilde $|AB| = 2$ birim olarak verilen ABD üçgenini kullanarak tablodaki trigonometrik ifadelere karşılık gelen sayısal değerleri bu ifadelerin karşılarına yazınız.

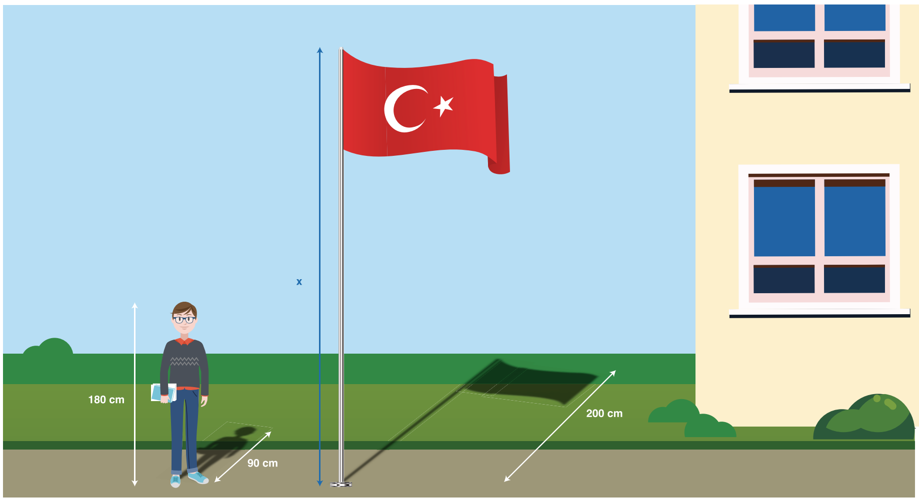


Trigonometrik ifade	Sayısal değer
$\sin(\widehat{ABC})$	
$\tan(\widehat{BAC})$	
$\cot(\widehat{ADC})$	
$\cos(\widehat{CAD})$	

3. Şekilde kesikli çizgilerden oluşan dairesel pistin uzunluğu 360 metredir. Buna göre



- Bu pistin A noktasından ok yönünde başlayarak 360 metre koşan bir kişinin pist üzerinde A noktasından kaç metre uzakta duracağını bulunuz.
- Bu pistin A noktasından ok yönünde başlayarak 720 metre koşan bir kişinin pist üzerinde A noktasından kaç metre uzakta duracağını bulunuz.
- Bu pistin A noktasından ok yönünde başlayarak 780 metre koşan bir kişinin pist üzerinde A noktasından kaç metre uzakta duracağını bulunuz.



Bağımsızlığımızın sembolü bayrağımız; okulların açılış ve kapanış törenleri, milli bayramlar ve anma törenlerinde İstiklâl Marşı eşliğinde göndere çekilir. Bayrak çekilen direğin uzunluğunu bulmanız istendiğinde kendinizin o andaki gölge boyu ile bayrağın gölge boyunu ölçebilirsiniz. Boyunuzun gölge boyunuza oranı ile bayrak direğinin boyunun gölge boyuna oranı değişmeyeceğinden basit orantı hesabı ile direğin uzunluğunu bulabilirsiniz. Ölçüleri eşit olan açıların trigonometrik oranları da eşit olacağından ve güneş ışınlarının yere geliş açıları aynı olduğundan direğin uzunluğu trigonometri bilgileri kullanılarak da hesaplanabilir.

Bu ünitede, üç açı ve üç kenardan oluşan üçgenin -en az biri kenar olmak üzere- üç elemanının bilindiği durumlarda bilinmeyen elemanlarının bulunmasını konu edinen trigonometriyi inceleyeceksiniz. Trigonometri; havalimanından yer düzlemine 20° lik açı ve 250 km/sa. hızla doğrusal bir yol boyunca havalanan uçağın 2 dakika sonra yerden yüksekliğinin kaç metre olacağı gibi basit soruların çözümünde kullanılabilir. Bunun yanı sıra trigonometri gezegenler ve yıldızlar arası mesafelerin bulunmasında, kan basıncının ölçümünde, mimaride, inşaat mühendisliğinde, makine mühendisliğinde karşılaşılan daha zor soruların çözümünde de kullanılır.

11.1.1. Yönlü Açılar

Terimler ve Kavramlar

- Yönlü Açı
- Derece
- Dakika
- Saniye
- Radyan
- Esas Ölçü

Sembol ve Gösterimler

- $^\circ$
- $'$
- $''$
- R

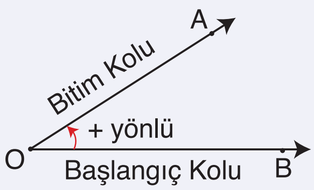
Neler Öğreneceksiniz?

- Yönlü açıyı kavramayı,
- Açı ölçü birimlerini açıklayarak birbiri ile ilişkilendirmeyi,
- Bir açının trigonometrik oranlarını birim çember yardımıyla hesaplamayı öğreneceksiniz.

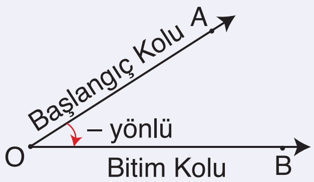
11.1.1.1. Yönlü Açılar

Bilgi

Kollarından biri başlangıç, diğeri bitiş olarak belirlenmiş açıya **yönlü açı** denir.
Bir açı, kenarlarının yazılış sırasına göre iki farklı biçimde yönlendirilebilir.



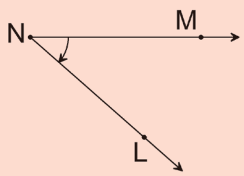
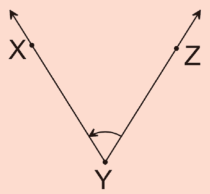
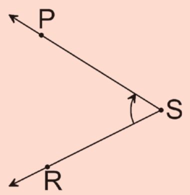
Yandaki şekilde verilen açı, OB ışınından OA ışınına doğru yönlendirilmiştir. OB ışını başlangıç kolu, OA ışını ise bitim koludur. Bu açının yönü, saat yönü ile terstir. Bu yöne **pozitif yön** adı verilir. Bu açı başlangıç kenarı üzerinden başlanarak $\widehat{BOA}$ biçiminde gösterilir.



Yandaki şekilde verilen açı ise OA ışınından OB ışınına doğru yönlendirilmiştir. OA ışını başlangıç kolu, OB ışını bitim koludur. Bu açının yönü, saat yönü ile aynıdır. Bu yöne **negatif yön** adı verilir. Bu açı yine başlangıç kolu üzerinden başlanarak $\widehat{AOB}$ biçiminde gösterilir.

Sıra Sizde

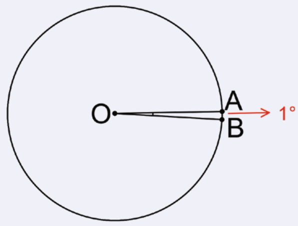
Aşağıda verilen tabloda istenen verileri örnekteki gibi boş bırakılan kutulara uygun şekilde yazınız.

Açı	Başlangıç Kolu	Bitim Kolu	Yönü	Gösterilişi
	[NM	[NL	Negatif	$\widehat{MNL}$
				
				

11.1.1.2. Açı Ölçü Birimleri

Bilgi

Derece



Bir çemberin çevresinin 360 eş parçaya ayrılması ile elde edilen bir parçaya **1 derecelik yay** ve bu yayı gören merkez açıya **1 derecelik açı** denir. Bu açının ölçüsü 1° şeklinde gösterilir. Dakika ve saniye derecenin alt birimleridir.

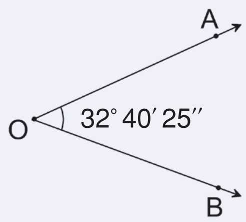
- 1 derecenin $\frac{1}{60}$'ine **1 dakika** denir ve 1 dakika $1'$ ile gösterilir.

  $1^\circ = 60'$ olur (1 derece 60 dakikadır.).

- 1 dakikanın $\frac{1}{60}$'ine ise **1 saniye** denir ve 1 saniye $1''$ ile gösterilir.

  $1' = 60''$ olur (1 dakika 60 saniyedir.).

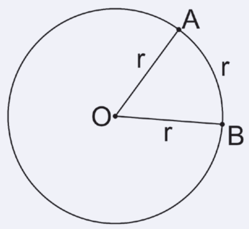
Derece cinsinden ölçümü tam sayı olmayan açıların ölçümlerinde dakika ve saniye de kullanılır.



Örneğin yandaki şekilde verilen açının ölçüsü, 32° ile 33° arasındadır. $m(\widehat{BOA}) = 32^\circ\,40'\,25''$ olarak gösterilir.

Bilgi

Radyan



Bir çemberin yarıçapı uzunluğundaki yayı gören merkez açının ölçüsüne **1 radyan** denir. Yanda verilen O merkezli çemberde AOB açısının ölçüsü 1 radyandır. Yarıçap uzunluğu r olan bir çemberin çevresi $2 \cdot \pi \cdot r$'dir. Buna göre doğru orantı kullanılarak

1 radyan r uzunluğundaki bir yayı gören merkez açıya karşılık geliyor ise
x radyan $2\pi r$ uzunluğundaki bir yayı gören merkez açıya karşılık gelir.

$x \cdot r = 2\pi r \cdot 1 \Rightarrow x = 2\pi$ olur. Buradan çemberin çevresi 2π radyan olarak yazılır.

- Bir açının derece cinsinden ölçüsü D, radyan cinsinden ölçüsü R olmak üzere bu ölçü birimleri arasında $\frac{D}{360^\circ} = \frac{R}{2\pi}$ eşitliği vardır. Bu eşitlikte sadeleştirme yapılırsa $\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$ olur.
- 1 radyan π'nin 3,14 değeri yaklaşık olarak 57,3248 derecedir.

(Açı ölçü birimi belirtilmediğinde ölçü radyan cinsinden kabul edilecektir.)

Örnek 1

Ölçüsü 240° olan bir açının ölçüsünün kaç radyan olduğunu bulunuz.

Çözüm

$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$ eşitliğinde D yerine 240° yazılırsa

$\frac{\overset{4}{\cancel{240^\circ}}}{\underset{3}{\cancel{180^\circ}}} = \frac{R}{\pi}$ olup $3 \cdot R = 4\pi$ ve $R = \frac{4\pi}{3}$ olur. Dolayısıyla $240^\circ = \frac{4\pi}{3}$ radyandır.

Sıra Sizde

Ölçüsü 300° olan bir açının ölçüsünün kaç radyan olduğunu bulunuz.

Örnek 2

Ölçüsü $\frac{5\pi}{4}$ radyan olan bir açının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm

1. yol

$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$ eşitliğinde R yerine $\frac{5\pi}{4}$ yazılırsa

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{\frac{5\cancel{\pi}}{4}}{\cancel{\pi}}$$

$$D = \overset{45^\circ}{\cancel{180^\circ}} \cdot \frac{5}{\cancel{4}}$$

$D = 225^\circ$ olur. Buradan $\frac{5\pi}{4}$ radyan $= 225^\circ$ olur.

2. yol

Radyan cinsinden verilen bir açı, dereceye çevrilirken π yerine 180° yazılabilir.

$$\frac{5 \cdot \pi}{4} = \frac{5 \cdot \overset{45^\circ}{\cancel{180^\circ}}}{\cancel{4}} = 225^\circ \text{ olur.}$$

Sıra Sizde

Ölçüsü $\frac{7\pi}{6}$ radyan olan bir açının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.

Örnek 3

Ölçüsü $1420'$ olan bir açıyı derece ve dakika cinsinden yazınız.

Çözüm

1 derece 60 dakikaya eşit olduğundan 1420 sayısı 60'a bölünür. Elde edilen bölüm derece, kalan ise dakika cinsinden yazılır.

$$\begin{array}{r|l} 1420 & 60 \\ \cline{2-2} -120 & 23 \\ \hline 220 & \\ -180 & \\ \hline 40 & \end{array}$$

(Yandaki bölme işleminde kolaylık sağlanması amacıyla birim kullanılmamıştır ve bundan sonraki bölme işlemlerinde aynı yol izlenmiştir.)

Buradan $1420' = 23^\circ 40'$ olarak yazılır.

Örnek 4

$48\,245''$ lik açının ölçüsünü derece, dakika ve saniye cinsinden yazınız.

Çözüm

1. yol

$1' = 60''$ olduğundan 48 245 saniye ilk olarak 60'a bölünür. Elde edilen bölüm dakika, kalan ise saniye cinsinden yazılır.

$$\begin{array}{r|l} 48\,245 & 60 \\ \cline{2-2} -480 & 804 \\ \hline 245 & \\ -240 & \\ \hline 5 & \end{array}$$

Buradan $48\,245'' = 804'\,5''$ olur.

$1^\circ = 60'$ Bölüm tekrar 60'a bölünür. Elde edilen bölüm derece, kalan ise dakika cinsinden yazılır.

$$\begin{array}{r|l} 804 & 60 \\ \cline{2-2} -60 & 13 \\ \hline 204 & \\ -180 & \\ \hline 24 & \end{array}$$

Buradan $48\,245'' = 13^\circ\,24'\,5''$ olur.

2. yol

$1^\circ = 60'$ ve $1' = 60''$ olduğundan
$1^\circ = 60 \cdot 60'' = 3600''$ olur. Dolayısıyla 48 245 saniye ilk olarak 3600'e bölünür. Elde edilen bölüm derece cinsinden yazılırken kalan ise saniye cinsinden yazılır.

$$\begin{array}{r|l} 48\,245 & 3600 \\ \cline{2-2} -3600 & 13 \\ \hline 12\,245 & \\ -10\,800 & \\ \hline 1445 & \end{array}$$

Bu bölme işleminden elde edilen $1445''$ lik açı 60'a bölünür. Elde edilen bölüm dakika cinsinden yazılırken kalan ise saniye cinsinden yazılır.

$$\begin{array}{r|l} 1445 & 60 \\ \cline{2-2} -120 & 24 \\ \hline 245 & \\ -240 & \\ \hline 5 & \end{array}$$

Buradan $48\,245'' = 13^\circ\,24'\,5''$ olur.

Sıra Sizde

$57\,948''$ lik açının ölçüsünü derece, dakika ve saniye cinsinden yazınız.

Örnek 5

$\alpha = 52^\circ 42' 23''$ ve $\beta = 45^\circ 28' 52''$ olarak veriliyor. Bu bilgilere göre

a) $\alpha + \beta$ **değerini bulunuz.**

b) $\alpha - \beta$ **değerini bulunuz.**

Çözüm

a) $\alpha + \beta$ değerlerini hesaplamak için sırasıyla α ve β değerleri alt alta yazılarak aynı cinsten açı ölçüleri kendi aralarında toplanabilir.

$$\begin{array}{rr} & 52^\circ 42' 23'' \\ + & 45^\circ 28' 52'' \\ \hline & 97^\circ 70' 75'' \end{array}$$

$75'' = 60'' + 15'' = 1' + 15''$ olduğundan $1'$ lık ölçü $70'$ nın üzerine eklenir.

$97^\circ 70' 75'' = 97^\circ 71' 15''$ olup $71' = 60' + 11' = 1^\circ + 11'$ olarak yazılır. 1° lik ölçü 97° üzerine ekle-nerek $97^\circ 71' 15'' = 98^\circ 11' 15''$ elde edilir. Buradan $\alpha + \beta = 98^\circ 11' 15''$ olur.

b) $52^\circ 42' 23'' - 45^\circ 28' 52''$ **işleminde** $23'' - 52''$ **işleminin sonucunun pozitif olması amacıyla** $42'$ **dan** $1' = 60''$ **alınıp** $23''$ **ye eklenir ve** $23'' + 60'' = 83''$ olur. **Buradan** $52^\circ 42' 23'' = 52^\circ 41' 83''$ **olur.**

$\alpha - \beta$ değerini hesaplamak için sırasıyla α ve β alt alta yazılarak aynı cinsten açı ölçüleri birbirinden çıkarılabilir.

$$\begin{array}{rr} & 52^\circ 41' 83'' \\ - & 45^\circ 28' 52'' \\ \hline & 7^\circ 13' 31'' \end{array}$$

Buradan $\alpha - \beta = 7^\circ 13' 31''$ olarak bulunur.

Sıra Sizde

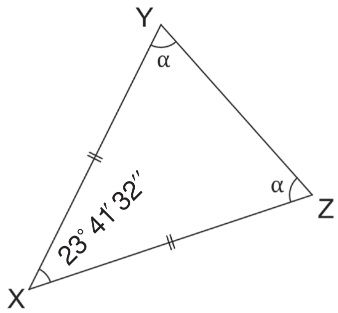
$\alpha = 53^\circ 14' 55''$ ve $\beta = 45^\circ 25' 37''$ olarak veriliyor. Bu bilgilere göre $\alpha + \beta$ ve $\alpha - \beta$ değerini bulunuz.

Örnek 6

Coğrafi haritalardaki kuzey yönü (coğrafi kuzey) ile bir pusulanın iğnesinin gösterdiği kuzey yönü (manyetik kuzey) birbirinden farklıdır. Bu iki gösterim arasındaki yön farkının açısal ölçümüne **manyetik sapma açısı** denir.

Yandaki görselde bir pusulanın sapma açısının ölçüsü $23^\circ 41' 32''$ olarak verilmiştir. Bu pusulaya bakarak X noktasından doğrusal hareket ederek bir Y noktasına ulaşmak isteyen bir izci grubu hatalı yönde $|XY|$ kadar ilerlemiş ve bir Z noktasına varmıştır. X, Y ve Z noktaları birleştirilerek elde edilen $\widehat{XYZ}$ nde $m(\widehat{XZY})$ nü hesaplayınız.

Çözüm



Köşeleri X, Y, Z noktaları olan $\widehat{XYZ}$ yukarıda verilen şekildeki gibidir. Bu üçgende $m(\widehat{Y}) = m(\widehat{Z}) = \alpha$ olsun. Bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° olduğundan

$2\alpha + 23^\circ 41' 32'' = 180^\circ$

$2\alpha = 180^\circ - (23^\circ 40' 32'')$ olur.

$180^\circ = 179^\circ 60' = 179^\circ 59' 60''$ olarak yazılırsa

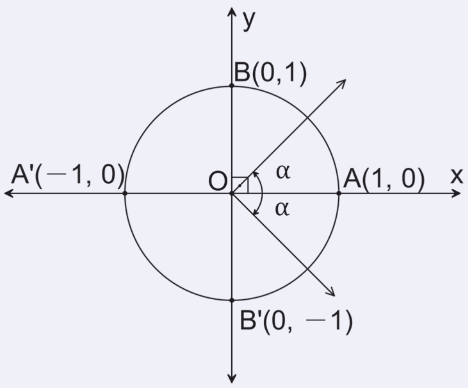
$$\begin{array}{r} 179^\circ 59' 60'' \\ - \quad 23^\circ 41' 32'' \\ \hline 156^\circ 18' 28'' \end{array}$$

ve $2\alpha = 156^\circ 18' 28'' \Rightarrow \alpha = \frac{156^\circ}{2} \frac{18'}{2} \frac{28''}{2} \Rightarrow \alpha = 78^\circ 9' 14''$ olarak bulunur.

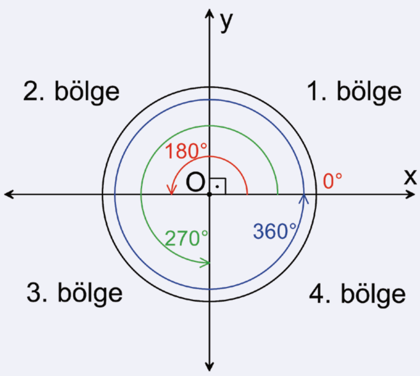
Sıra Sizde

İki iç açısının ölçüsü $57^\circ 39' 48''$ ve $75^\circ 23' 10''$ olan bir üçgenin diğer iç açısının ölçüsünü bulunuz.

Bilgi



Birim çember üzerinde ölçüsü α olan bir açı,
$\alpha > 0$ ise başlangıç kolu OA ışını olmak üzere bitim kolu saat yönünün tersine doğru α kadar açılarak gösterilir.
$\alpha < 0$ ise yine başlangıç kolu OA ışını olmak üzere bitim kolu saat yönü ile aynı olacak şekilde α kadar açılarak gösterilir.



0°, 90°, 180° ve 270° lik açılar yukarıda verilen şekildeki birim çember üzerinde gösterilmiştir (Birim çember üzerinde 0° ve 360° lik açıların bitim kollarının birim çemberi aynı noktada kestiğine dikkat ediniz.).
Birim çember üzerinde 4 farklı bölge vardır. Ölçüsü α olan bir açı için

- $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ise bu açı 1. bölgededir.
- $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ise bu açı 2. bölgededir.
- $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ ise bu açı 3. bölgededir.
- $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ ise bu açı 4. bölgededir.

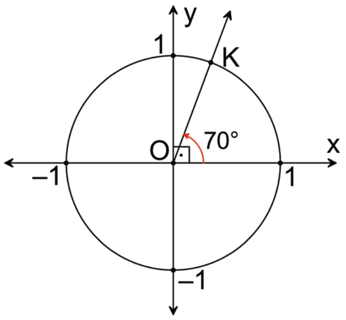
Örnek 7

Ölçüleri 70°, 120°, 200° ve 315° olan açıları birim çember üzerinde gösteriniz.

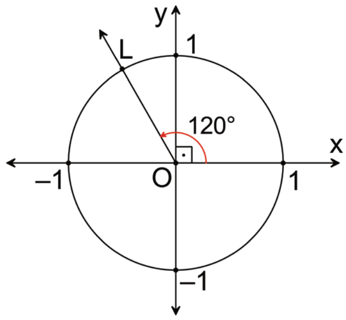
Çözüm

Ölçüleri 70°, 120°, 200° ve 315° olan açılar, birim çember üzerinde verilen sıra ile açıölçer kullanılarak çizilip aşağıdaki gibi gösterilir.

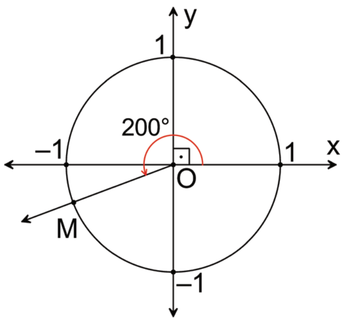
$0^\circ < 70^\circ < 90^\circ$ olduğundan 70° lik açı 1. bölgededir.



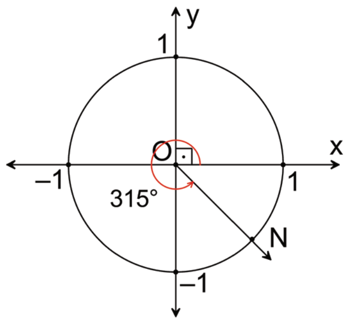
$90^\circ < 120^\circ < 180^\circ$ olduğundan 120° lik açı 2. bölgededir.



$180^\circ < 200^\circ < 270^\circ$ olduğundan 200° lik açı 3. bölgededir.



$270^\circ < 315^\circ < 360^\circ$ olduğundan 315° lik açı 4. bölgededir.

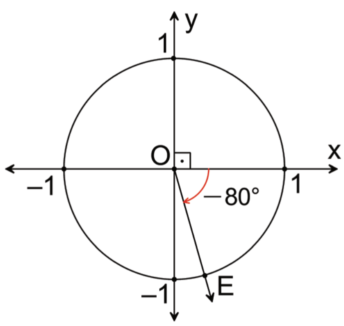


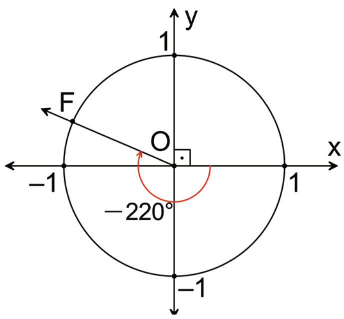
Örnek 8

Ölçüleri -80° ve -220° olan açıları birim çember üzerinde gösteriniz.

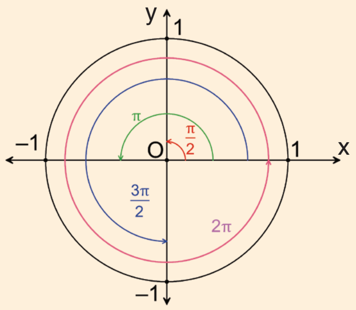
Çözüm

Ölçüleri -80° ve -220° olan açılar, birim çember üzerinde sıra ile aşağıdaki gibi gösterilir.





İpucu



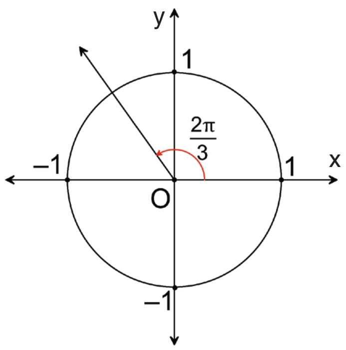
$90^{\circ} = \frac{\pi}{2}$ radyan, $180^{\circ} = \pi$ radyan, $270^{\circ} = \frac{3\pi}{2}$ radyan ve $360^{\circ} = 2\pi$ radyan olduğundan birim çember üzerindeki bu dört açı yanda verilen şekildeki gibi de gösterilebilir.

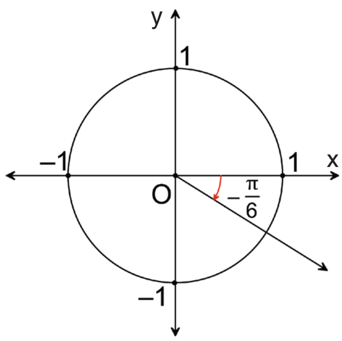
Örnek 9

Ölçüleri $\frac{2\pi}{3}$ ve $-\frac{\pi}{6}$ radyan olan açıları birim çember üzerinde gösteriniz.

Çözüm

$\frac{2\pi}{3}$ ve $-\frac{\pi}{6}$ radyanlık açılar birim çember üzerinde aşağıdaki gibi gösterilir.

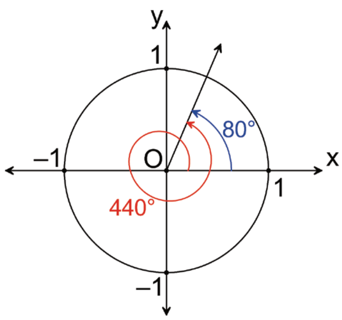




Örnek 10

Ölçüsü 440° olan bir açıyı birim çember üzerinde gösteriniz.

Çözüm



Birim çemberin çevresini oluşturan yayın ölçüsü 360° olduğundan 440° lik bir açı önce birim çember etrafında pozitif yönde 360° ve ardından 80° açılarak gösterilebilir.

Yandaki çizimde 440° lik bir açının bitim kolu ile 80° lik bir açının bitim kolunun aynı olduğu görülür.

Bilgi

Esas Ölçü

- $k \in \mathbb{Z}$ ve $0^\circ \le \alpha < 360^\circ$ olmak üzere ölçüsü $\alpha + k \cdot 360^\circ$ olan bir açının esas ölçüsü α derecedir.
- $k \in \mathbb{Z}$ ve $0 \le \alpha < 2\pi$ olmak üzere ölçüsü $\alpha + k \cdot 2\pi$ olan bir açının esas ölçüsü α radyandır.

Örnek 11

Ölçüsü 2324° olan bir açının esas ölçüsünü derece cinsinden bulunuz.

Çözüm

Ölçüsü derece cinsinden verilen bir açının esas ölçüsünü bulmak için verilen açının ölçüsü 360° ye bölünür. Bu bölme işleminde kalan esas ölçüdür.

$$\begin{array}{r|l} 2324 & 360 \\ \cline{2-2} -\ 2160 & 6 \\ \hline 164 & \end{array}$$

$2324^\circ = 164^\circ + 6 \cdot 360^\circ$ biçiminde yazılarak 2324° lik bir açının esas ölçüsü 164° olarak bulunur.

Sıra Sizde

Ölçüsü 1490° olan bir açının esas ölçüsünü derece cinsinden bulunuz.

Örnek 12

Ölçüsü -1140° olan bir açının esas ölçüsünü derece cinsinden bulunuz.

Çözüm

$$\begin{array}{r|l} -1140 & 360 \\ \cline{2-2} -\ -1440 & -4 \\ \hline 300 & \end{array}$$

$-1140^\circ = 300^\circ + (-4) \cdot 360^\circ$ biçiminde yazılarak -1140° lik bir açının esas ölçüsü 300° olarak bulunur.

Sıra Sizde

Ölçüsü -2360° olan bir açının esas ölçüsünü derece cinsinden bulunuz.

Örnek 13

Aşağıda ölçüleri verilen açıların esas ölçülerini radyan cinsinden bulunuz.

a) 13π

b) $\dfrac{39\pi}{5}$

c) $-\dfrac{23\pi}{4}$

Çözüm

a) Ölçüsü $\alpha = 13\pi$ radyan olan bir açının esas ölçüsünü bulmak için verilen açının içindeki 2π'nin tam katları çıkarılmalıdır. Buradan

$13\pi = \pi + 6 \cdot 2\pi$ olup 2π'nin 6 katı çıkarıldığında ölçüsü 13π radyan olan açının esas ölçüsü π radyandır.

b) $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere β radyanlık bir açının esas ölçüsü x ise $\beta = x + k \cdot 2\pi$ olmalıdır. Buradan $\dfrac{39\pi}{5} = x + k \cdot 2\pi \Rightarrow 39\pi = 5x + k \cdot 10\pi$ olur. Esas ölçü olan x değerini bulmak için 39π'den 10π'nin katlarını çıkarmak için 39 sayısı 10'a bölünerek kalan bulunur (10 sayısının $\dfrac{39\pi}{5}$ kesrinin paydasının 2 katı olduğuna dikkat ediniz.).

$$\begin{array}{r|l} 39 & 10 \\ \cline{2-2} -30 & 3 \longrightarrow k \\ \cline{1-1} 9 & \end{array}$$

Buradan $39\pi = 5x + k \cdot 10\pi \Rightarrow 39\pi = 5x + 3 \cdot 10\pi \Rightarrow 9\pi = 5x \Rightarrow x = \dfrac{9\pi}{5}$ radyan olur.

Ölçüsü $\dfrac{39\pi}{5}$ radyan olan bir açının esas ölçüsü $\dfrac{9\pi}{5}$ radyan olur.

Bu soru aşağıdaki şekilde de çözülür.

$\beta = \dfrac{39\pi}{5}$'in içerisinden 2π nin tam katlarını çıkarabilmek için paydaki π'nin katsayısı paydadaki sayının iki katına bölünür.

$$\begin{array}{r|l} 39 & 10 \\ \cline{2-2} -30 & 3 \\ \cline{1-1} 9 & \end{array}$$

ve
$$\begin{aligned} \frac{39\pi}{5} = \frac{(9 + 3 \cdot 10)\pi}{5} &= \frac{9\pi + 30\pi}{5} \\ &= \frac{9\pi}{5} + \frac{30\pi}{5} \\ &= \frac{9\pi}{5} + 6 \cdot \pi = \frac{9\pi}{5} + 3 \cdot 2\pi \text{ olup} \end{aligned}$$

ölçüsü $\dfrac{39\pi}{5}$ radyan olan bir açının esas ölçüsü $\dfrac{9\pi}{5}$ radyan olur.

c)

$$\begin{array}{r|l} -23 & 8 \\ \cline{2-2} -24 & -3 \\ - \\ \hline 1 & \end{array}$$

ve $\frac{-23\pi}{4} = \frac{(1-3\cdot 8)\pi}{4} = \frac{\pi - 24\pi}{4}$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{24\pi}{4}$

$= \frac{\pi}{4} - 6\cdot\pi == \frac{\pi}{4} - 3\cdot 2\pi$ olup

ölçüsü $-\frac{23\pi}{4}$ radyan olan bir açının esas ölçüsü $\frac{\pi}{4}$ radyan olur.

Sıra Sizde

Ölçüleri verilen aşağıdaki açıların esas ölçülerini radyan cinsinden bulunuz.

a) 773π

b) $\frac{85\pi}{3}$

c) $-\frac{43\pi}{7}$

Örnek 14

Ölçüleri $\alpha = -110^\circ$ ve $\beta = -\frac{\pi}{3}$ olan açıların esas ölçülerini radyan cinsinden bulunuz.

Çözüm

Ölçüsü derece cinsinden verilmiş ve $[-360^\circ, 0^\circ)$ aralığındaki bir açının esas ölçüsü bu açının ölçüsüne 360° eklenerek hesaplanabilir. Buradan -110° lik bir açının esas ölçüsü $-110^\circ + 360^\circ = 250^\circ$ olur.

Ölçüsü radyan cinsinden verilmiş ve $[-2\pi, 0)$ aralığındaki bir negatif açının esas ölçüsü bu açının ölçüsüne 2π eklenerek hesaplanabilir. Buradan
$\beta = -\frac{\pi}{3}$ radyanlık açının esas ölçüsü $-\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$ radyan olarak bulunur.

ALIŞTIRMALAR

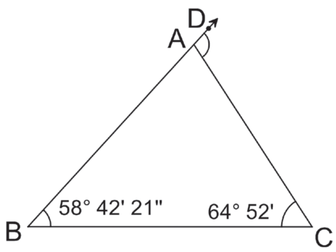
1. $\alpha = 48^\circ 22'$ ve $\beta = 23^\circ 42' 12''$ açıları için

a) $\alpha + \beta$ **toplamını bulunuz.**

b) $\alpha - \beta$ **farkını bulunuz.**

2. Ölçüsü $54^\circ 14' 52''$ olan α açısının tümler açısının ölçüsünü bulunuz.

3.



Yukarıda verilen ABC üçgeninde B, A, D noktaları doğrusal olmak üzere
$m(\widehat{ABC}) = 58^\circ 42' 21''$ ve $m(\widehat{ACB}) = 64^\circ 52'$
olarak verilmiştir. Bu bilgilere göre $\widehat{DAC}$'nın ölçüsünü derece, dakika ve saniye cinsinden bulunuz.

4. Ölçüsü $-\frac{73\pi}{4}$ radyan olarak verilen açının esas ölçüsünün radyan cinsinden eşitini bulunuz.

5.

Derece	40°		-240°		720°
Radyan		$\frac{3\pi}{5}$		$-\frac{15\pi}{4}$	

Yukarıdaki tabloda derece veya radyan cinsinden açılar verilmiştir. Bu açıları birbirine dönüştürerek boş bırakılan yerlere yazınız.

6. Aşağıda ölçüleri verilen açıların esas ölçülerini derece cinsinden bulunuz.

a) 2870° **b)** -520° **c)** -210°

7. Aşağıda ölçüleri verilen açıların esas ölçülerini derece cinsinden bulunuz.

a) $\frac{43\pi}{5}$ **b)** $-\frac{80\pi}{3}$ **c)** $-\frac{4\pi}{3}$

8. k tek sayı olmak üzere α açısı

$\alpha = -\frac{\pi}{8} + 11 \cdot \pi \cdot k$ olarak veriliyor. Ölçüsü α olan bu açının esas ölçüsünün radyan cinsinden eşitini bulunuz.

11.1.2. Trigonometrik Fonksiyonlar

11.1.2.1. Birim Çember ve Trigonometrik Fonksiyonlar

Terimler ve Kavramlar

- Trigonometrik Fonksiyon
- Periyot
- Periyodik Fonksiyon

Sembol ve Gösterimler

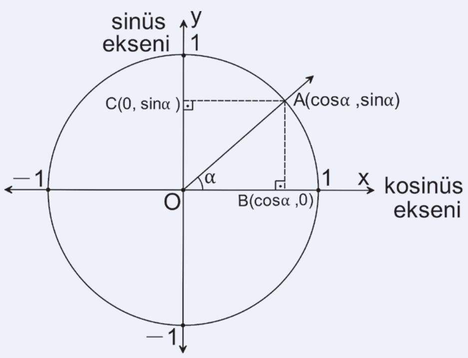
- sinx
- cosx
- tanx
- cotx
- cosecx
- secx
- arcsinx
- arccosx
- arctanx
- T
- $f(x+T)$

Neler Öğreneceksiniz?

- Trigonometrik fonksiyonları birim çember yardımıyla açıklamayı,
- Kosinüs teoremiyle ilgili problemler çözebilmeyi,
- İki kenarının uzunluğu ve bu kenarlar arasındaki açının ölçüsü verilen üçgenin alanını hesaplamayı,
- Trigonometrik fonksiyon grafiklerini çizmeyi,
- Sinüs, kosinüs, tanjant fonksiyonlarının ters fonksiyonlarını açıklamayı öğreneceksiniz.

Sinüs ve Kosinüs Fonksiyonları

Bilgi



BOA açısının bitim kolu olan $[OA$ 'nın birim çemberi kestiği nokta A ve $m(\widehat{BOA})=\alpha$ olmak üzere A noktasının 1. bileşenine (apsis) **α'nın kosinüsü** denir ve $\cos\alpha$ ile gösterilir. α'yı $\cos\alpha$'ya dönüştüren fonksiyona ise **kosinüs fonksiyonu** adı verilir.

Kosinüs fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R}$, görüntü kümesi $[-1, 1]$'dır.
Kosinüs fonksiyonu $\cos: \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x)=\cos x$ biçiminde ifade edilebilir.

A noktasının 2. bileşenine (ordinat) ise α **nın sinüsü** denir ve $\sin\alpha$ ile gösterilir.
α gerçek sayısını $\sin\alpha$'ya dönüştüren fonksiyona ise **sinüs fonksiyonu** adı verilir.
Sinüs fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R}$, görüntü kümesi $[-1, 1]$'dır.
Sinüs fonksiyonu $\sin: \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $g(x)=\sin x$ biçiminde ifade edilebilir.
Sonuç olarak

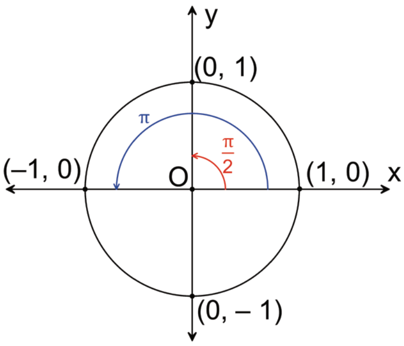
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $-1 \le \cos\alpha \le 1$ ve $-1 \le \sin\alpha \le 1$ olur.
- α açısının kosinüsü A noktasının apsisi olduğundan x eksenine **kosinüs ekseni**, α açısının sinüsü A noktasının ordinatı olduğundan y eksenine de **sinüs ekseni** denir.

Örnek 1

$\sin\frac{\pi}{2}$ ve $\cos\pi$ değerlerini birim çember yardımıyla bulunuz.

Çözüm

Ölçüleri $\frac{\pi}{2}$ ve π radyan olan açılar birim çember üzerinde aşağıdaki gibi gösterilir.



$\frac{\pi}{2}$ radyanlık açıya karşılık gelen noktanın (0, 1) olduğu görülür.
Bu noktanın **ikinci bileşeni** 1 olduğundan $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ olur.

Aynı şekilde π radyanlık açıya ise $(-1, 0)$ noktası karşılık gelir.
Bu noktanın **birinci bileşeni** -1 olduğundan $\cos\pi = -1$ olur.

Sıra Sizde

Aşağıdaki tabloda boş bırakılan bölgelere birim çemberden faydalanarak uygun değerleri yazınız.

Açının ölçüsü α / Açının trigonometrik değeri	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\cos\alpha$					
$\sin\alpha$					

Örnek 2

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{5\sin x + 11}{2}$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun görüntü kümesini bulunuz.

Çözüm

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $-1 \le \sin x \le 1$ olduğuna göre

$5 \cdot (-1) \le 5\sin x \le 5 \cdot 1$ (Eşitsizliğin her bölgesindeki ifade 5 ile çarpılır.)

$-5 + 11 \le 5\sin x + 11 \le 5 + 11$ (Eşitsizliğin her bölgesindeki ifadeye 11 eklenir.)

$\frac{6}{2} \le \underbrace{\frac{5\sin x + 11}{2}}_{f(x)} \le \frac{16}{2}$ (Eşitsizliğin her bölgesindeki ifade 2 ile bölünür.)

$3 \le f(x) \le 8$ olup $f(x)$ fonksiyonunun görüntü kümesi $[3, 8]$ olur.

Örnek 3

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\cos^2 x = -2a + 11$ denklemini sağlayan a gerçek sayısının kaç farklı tam sayı değeri alabileceğini bulunuz.

Çözüm

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $-1 \le \cos x \le 1$ olduğundan $\cos^2 x$ değerlerinin alabileceği en geniş aralık $[0, 1]$ olur.
Buradan $0 \le \cos^2 x \le 1$ olarak yazılır. Bu eşitsizlikte $\cos^2 x$ yerine $-2a + 11$ yazılırsa

$$0 \le -2a + 11 \le 1$$

$0 - 11 \le -2a + 11 - 11 \le 1 - 11$ (Eşitsizliğin her bölgesindeki ifadeden 11 çıkarılır.)

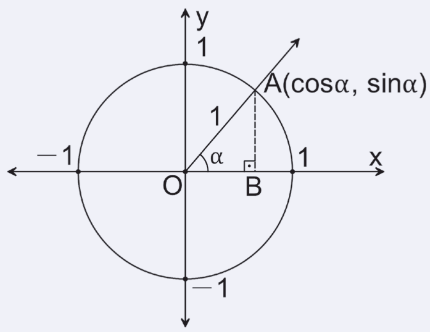
$-11 \le -2a \le -10$ ifadesinde eşitsizliğin her bölgesindeki ifade -2 ile bölünürse $\frac{11}{2} \ge a \ge 5$ olur.

Bu eşitsizliği sağlayan a gerçek sayısının alabileceği tam sayı değeri 5'tir. Buradan cevap 1 olur.

Sıra Sizde

$m \in \mathbb{Z}$ ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\sin x = \frac{2m - 7}{3}$ olduğuna göre m'nin kaç farklı değer alabileceğini bulunuz.

Bilgi



Yukarıdaki şekilde derece cinsinden ölçüsü α olarak verilen bir BOA açısı için
$|OB| = \cos\alpha$, $|AB| = \sin\alpha$ ve $|OA| = r = 1$ birimdir. ABO dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanarak

$$|OB|^2 + |AB|^2 = 1^2$$

$$(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ elde edilir.

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere α açısının kosinüsü ve sinüsü arasında $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ özdeşliği vardır.

Örnek 4

$0^\circ < x < 360^\circ$ olmak üzere $\sin x - \cos x = \frac{1}{3}$ olduğuna göre $\sin x \cdot \cos x$ değerini bulunuz.

Çözüm

$\sin x - \cos x = \frac{1}{3}$ eşitliğinde her iki tarafın karesi alınırsa

$$(\sin x - \cos x)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = \frac{1}{9}$$

$$\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} - 2\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{9}$$

$$-2\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{9} - \frac{1}{\underset{(9)}{1}}$$

$$-2\sin x \cdot \cos x = -\frac{8}{9}$$

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{4}{9} \text{ olur.}$$

Örnek 5

$0^\circ < x < 90^\circ$ ve $\frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = 1 - \sin x$ eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

Çözüm

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ olduğundan $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = (1 + \sin x) \cdot (1 - \sin x)$ biçiminde yazılabilir.

Buradan $\frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin x} = \frac{\cancel{(1 + \sin x)} \cdot (1 - \sin x)}{\cancel{1 + \sin x}} = 1 - \sin x$ olur.

Örnek 6

$0^\circ < x < 90^\circ$ ve $\frac{\sin^5 x \cdot \cos^2 x + \sin^3 x \cdot \cos^4 x}{\sin^2 x - 1} = -\sin^3 x$ eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

Çözüm

$\sin^5 x \cdot \cos^2 x + \sin^3 x \cdot \cos^4 x$ ifadesi $\sin^3 x \cdot \cos^2 x$ ortak çarpan parantezine alınıp
$\sin^3 x \cdot \cos^2 x \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)$ olur. $\sin^2 x - 1 = -\underbrace{(1 - \sin^2 x)}_{\cos^2 x} = -\cos^2 x$ olarak yazılırsa

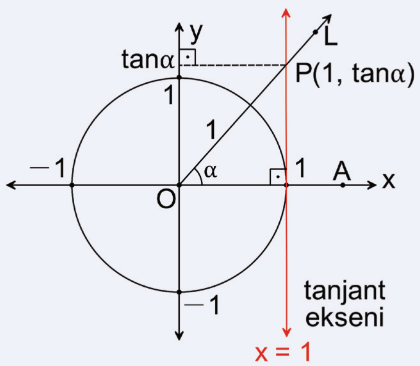
$$\frac{\sin^3 x \cdot \cos^2 x \cdot \overbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}^{1}}{-\cos^2 x} = \frac{\sin^3 x \cdot \cancel{\cos^2 x}}{\cancel{-\cos^2 x}} = -\sin^3 x \text{ olur.}$$

Sıra Sizde

$0^\circ < x < 90^\circ$ ve $\dfrac{\sin^2 x \cdot \cos x + \cos^3 x}{\cos x}$ ifadesini en sade biçimde yazınız.

Tanjant ve Kotanjant Fonksiyonları

Bilgi

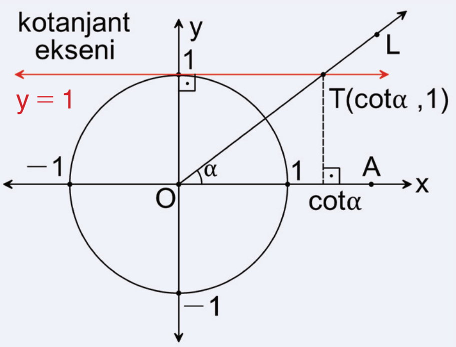


Yandaki birim çemberde ölçüsü α olarak verilen AOL açısının bitim kolu olan OL ışını ile $x = 1$ doğrusunun kesim noktası P olmak üzere

- P noktasının ordinatına α'**nın tanjantı**, α'yı $\tan\alpha$ ile eşleyen fonksiyona ise **tanjant fonksiyonu** adı verilir.
- $x = 1$ doğrusuna **tanjant ekseni** denir. α'nın esas ölçüsü $\dfrac{\pi}{2}$ veya $\dfrac{3\pi}{2}$'ye eşit olduğunda OL ışını $x = 1$ doğrusuna paralel olacağından α'nın tanjantı tanımsızdır.
- Tanjant fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R} - \left\{x \mid x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, görüntü kümesi ise $\mathbb{R}$'dir.

$\tan: \mathbb{R} - \left\{x \mid x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \tan x$

şeklinde gösterilir.



Yandaki birim çemberde ölçüsü α olarak verilen AOL açısının bitim kolu olan OL ışını ile $y = 1$ doğrusunun kesim noktası T olmak üzere

- T noktasının apsisine α'**nın kotanjantı**, α'yı $\cot\alpha$ ile eşleyen fonksiyona ise **kotanjant fonksiyonu** adı verilir.
- $y = 1$ doğrusuna **kotanjant ekseni** denir. α değeri π'ye eşit olduğunda OL ışını $y = 1$ doğrusuna paralel olacağından α'nın kotanjantı tanımsızdır.
- Kotanjant fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R} - \{x \mid x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, görüntü kümesi ise $\mathbb{R}$'dir.

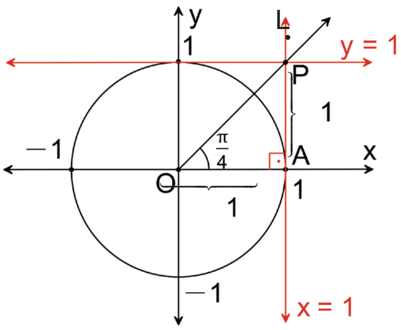
$\cot: \mathbb{R} - \{x \mid x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R},\ g(x) = \cot x$

şeklinde gösterilir.

Örnek 7

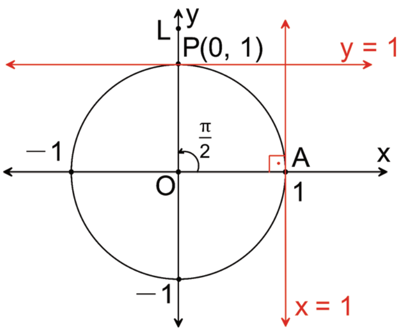
$\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$ radyan olarak verilen açı ölçülerinin tanjant ve kotanjant değerlerini birim çember yardımıyla bulunuz.

Çözüm



Yandaki şekilde $m(\widehat{AOP}) = \frac{\pi}{4}$ radyan olmak üzere AOP üçgeni bir ikizkenar dik üçgen olduğundan $|PA| = |OA|$ olur. $[OL$ 'nın $x = 1$ doğrusunu kestiği P noktasının ordinatı 1 ve $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ olur.

$[OL$ 'nın $y = 1$ doğrusunu kestiği noktanın apsisi 1 ve $\cot\frac{\pi}{4} = 1$ olur.



Yandaki şekilde $m(\widehat{AOP}) = \frac{\pi}{2}$ radyan olmak üzere $[OL$ ile $x = 1$ doğrusu paraleldir. Dolayısıyla ölçüsü $\frac{\pi}{2}$ olarak verilen bir açının bitim kolu olan $[OL$, tanjant eksenini kesmez. Buradan tanjant değeri bulunamayacağından $\tan\frac{\pi}{2}$ tanımsızdır.

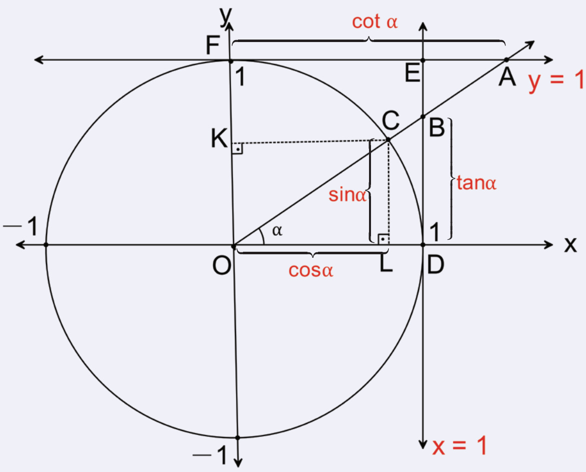
$[OL$ 'nın $y = 1$ doğrusunu kestiği noktanın apsisi 0 olacağından $\cot\frac{\pi}{2} = 0$ olur.

Sıra Sizde

Aşağıdaki tabloda bazı açı ölçüleri ve bunların bir kısmının tanjant ve kotanjant değerleri ile ilgili bilgiler verilmiştir. Tablodaki boş bırakılan kısımları uygun biçimde doldurunuz.

Açının ölçüsü α / Açının trigonometrik değeri	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{11\pi}{2}$	7π
$\tan\alpha$	0					tanımsız	0
$\cot\alpha$			tanımsız				

Bilgi



Yandaki şekilde $\widehat{OLC} \sim \widehat{ODB}$ olduğundan

- $\dfrac{|OL|}{|OD|} = \dfrac{|LC|}{|DB|}$ olup $\dfrac{\cos\alpha}{1} = \dfrac{\sin\alpha}{\tan\alpha}$ olarak yazılır. Buradan

$\tan\alpha \cdot \cos\alpha = \sin\alpha$ olup $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ olur.

Benzer şekilde $\widehat{OKC} \sim \widehat{OFA}$ olduğundan

- $\dfrac{|OK|}{|OF|} = \dfrac{|KC|}{|FA|}$ olup $\dfrac{\sin\alpha}{1} = \dfrac{\cos\alpha}{\cot\alpha}$ olarak yazılır.

Buradan $\cot\alpha \cdot \sin\alpha = \cos\alpha$ olup $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ olur.

Sonuç olarak $\cos\alpha \neq 0$ olmak üzere $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ve $\sin\alpha \neq 0$ olmak üzere $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ olur.
Elde edilen bu iki eşitlikten

$\tan\alpha \neq 0$ ve $\cot\alpha \neq 0$ olmak üzere $\tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha}$, $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$ ve $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$ olduğu görülür.

Örnek 8

$\dfrac{-2\sin x + 3\cos x}{\sin x - \cos x} = \dfrac{3}{2}$ olarak veriliyor. Buna göre tanx değerini bulunuz.

Çözüm

Verilen eşitlikte içler dışlar çarpımı yapılırsa

$$\frac{-2\sin x + 3\cos x}{\sin x - \cos x} = \frac{3}{2} \Rightarrow -4\sin x + 6\cos x = 3\sin x - 3\cos x$$

$$-4\sin x - 3\sin x = -6\cos x - 3\cos x$$

$$-7\sin x = -9\cos x \text{ olur.}$$

Orantı özelliği kullanılarak $\dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{-9}{-7}$ ve $\tan x = \dfrac{9}{7}$ olarak bulunur.

Sıra Sizde

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ olmak üzere $\dfrac{5\cos x - 2\sin x}{\sin x + 2\cos x} = \dfrac{4}{3}$ eşitliği veriliyor. Buna göre cotx değerini bulunuz.

Örnek 9

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $\tan x - \cot x = 3$ olduğuna göre $\tan^2 x + \cot^2 x$ değerini bulunuz.

Çözüm

$\tan x - \cot x = 3$ eşitliğinde her iki tarafın karesi alınırsa

$$(\tan x - \cot x)^2 = 3^2$$

$$\tan^2 x - 2\underbrace{\tan x \cdot \cot x}_{1} + \cot^2 x = 9$$

$$\tan^2 x - 2 + \cot^2 x = 9$$

$\tan^2 x + \cot^2 x = 11$ olarak bulunur.

Örnek 10

Tanımlı olduğu açı değerleri için $\dfrac{1+\tan^2 x}{1+\cot^2 x}$ ifadesinin $\tan^2 x$'e eşit olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$ ise $\cot^2 x = \dfrac{1}{\tan^2 x}$ olarak yazılabilir.

$\dfrac{1+\tan^2 x}{1+\cot^2 x}$ ifadesinde $\cot^2 x$ yerine $\dfrac{1}{\tan^2 x}$ yazılırsa

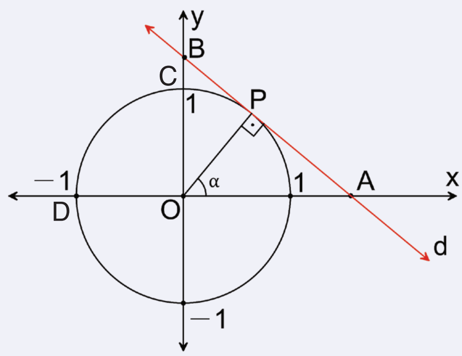
$$\frac{1+\tan^2 x}{1+\dfrac{1}{\tan^2 x}} = \frac{1+\tan^2 x}{\dfrac{\tan^2 x + 1}{\tan^2 x}} = \left(\cancel{1+\tan^2 x}\right) \cdot \frac{\tan^2 x}{\cancel{1+\tan^2 x}} = \tan^2 x \text{ olur.}$$

Sıra Sizde

Tanımlı olduğu açı değerleri için $\dfrac{\cot x - \tan x}{\cot^2 x - \tan^2 x}$ ifadesinin $\sin x \cdot \cos x$'e eşit olduğunu gösteriniz.

Sekant ve Kosekant Fonksiyonları

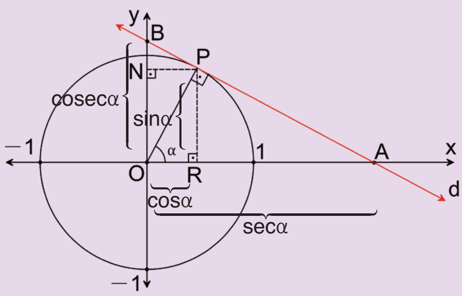
Bilgi



Yandaki şekilde $m(\widehat{AOP})=\alpha$ olmak üzere d doğrusu birim çembere P noktasında teğettir. d doğrusunun x eksenini kestiği nokta A, y eksenini kestiği nokta B olmak üzere A noktasının apsisine α **açısının sekantı** denir ve $\sec\alpha$ biçiminde gösterilir. Bir x gerçek sayısını secx ile eşleyen fonksiyona ise **sekant fonksiyonu** denir. Ölçüsü $\frac{\pi}{2}$ olan bir açının sekantı C noktasından çembere çizilen teğet, x eksenini kesmeyeceğinden tanımsızdır. Sekant fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R}-\left\{x \mid x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$, görüntü kümesi $\mathbb{R}-(-1,1)$'dir.

B noktasının ordinatına α **açısının kosekantı** denir ve α açısının kosekantı $\operatorname{cosec}\alpha$ biçiminde gösterilir. Bir x gerçek sayısını cosecx ile eşleyen fonksiyona ise **kosekant fonksiyonu** denir. Ölçüsü π olan bir açının kosekantı D noktasından çembere çizilen teğet, y eksenini kesmeyeceğinden tanımsızdır. Kosekant fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R}-\{x \mid x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$, görüntü kümesi $\mathbb{R}-(-1,1)$'dir.

Buluyorum



Yandaki şekilde $\widehat{OPR} \sim \widehat{OAP}$ olduğundan

$\frac{|OP|}{|OA|}=\frac{|OR|}{|OP|}$ yazılabilir. Buradan

$\frac{1}{\sec\alpha}=\frac{\cos\alpha}{1} \Rightarrow \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$ bulunur.

$\widehat{PON} \sim \widehat{BOP}$ olduğundan $\frac{|PO|}{|BO|}=\frac{|ON|}{|OP|}$ yazılabilir.

Buradan $\frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1} \Rightarrow \operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$ bulunur.

Sonuç olarak $\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$ ve $\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$ olarak yazılabilir.

Örnek 11

$0<x<\frac{\pi}{2}$ olmak üzere $\tan x\cdot\operatorname{cosec}x=\sec x$ eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

Çözüm

$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ ve $\operatorname{cosec}x=\frac{1}{\sin x}$ değerleri verilen eşitlikte yerlerine yazılırsa $\frac{\cancel{\sin x}}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cancel{\sin x}}=\frac{1}{\cos x}=\sec x$ olur.

Örnek 12

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $\frac{5}{\sec^2 x} + \frac{5}{\operatorname{cosec}^2 x}$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

Çözüm

Verilen ifadede $\sec^2 x = \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 x}$ ve $\operatorname{cosec}^2 x = \left(\frac{1}{\sin x}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 x}$ olup bu değerler verilen ifadede yerlerine yazılırsa $\frac{5}{\sec^2 x} + \frac{5}{\operatorname{cosec}^2 x} = \frac{5}{\frac{1}{\cos^2 x}} + \frac{5}{\frac{1}{\sin^2 x}}$

$$= 5 \cdot \cos^2 x + 5 \cdot \sin^2 x$$

$$= 5\underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_{1}$$

$= 5$ bulunur.

Örnek 13

Tanımlı olduğu açı değerleri için $(\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x) : \cot^2 x$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

Çözüm

$\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$, $\operatorname{cosec}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ ve $\cot^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$ değerleri verilen ifadede yerlerine yazılırsa

$$(\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x) : \cot^2 x = \left(\frac{1}{\underset{(\sin^2 x)}{\cos^2 x}} + \frac{1}{\underset{(\cos^2 x)}{\sin^2 x}}\right) : \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\overbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}^{1}}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} : \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cancel{\sin^2 x} \cdot \cos^2 x} \cdot \frac{\cancel{\sin^2 x}}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^4 x} = \left(\frac{1}{\cos x}\right)^4 = \sec^4 x \text{ olarak bulunur.}$$

Sıra Sizde

Tanımlı olduğu açı değerleri için $(\operatorname{cosec} x - \cot x)^2 \cdot (1 + \cos x)$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

Örnek 14

Tanımlı olduğu açı değerleri için $\left(\dfrac{1+2\sin x\cdot\cos x}{\operatorname{cosec}x+\sec x}\right)\cdot(\tan x+\cot x)=\sin x+\cos x$ eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

Çözüm

$\operatorname{cosec}x=\dfrac{1}{\sin x}$, $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$, $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ ve $\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ değerleri verilen eşitliğin sol tarafında yerle-

rine yazılırsa

$$\left(\frac{1+2\sin x\cdot\cos x}{\underset{(\cos x)}{\dfrac{1}{\sin x}}+\underset{(\sin x)}{\dfrac{1}{\cos x}}}\right)\cdot\left(\underset{(\sin x)}{\frac{\sin x}{\cos x}}+\underset{(\cos x)}{\frac{\cos x}{\sin x}}\right)=\frac{1+2\sin x\cdot\cos x}{\dfrac{\cos x+\sin x}{\sin x\cdot\cos x}}\cdot\frac{\overbrace{\sin^2x+\cos^2x}^{1}}{\sin x\cdot\cos x}$$

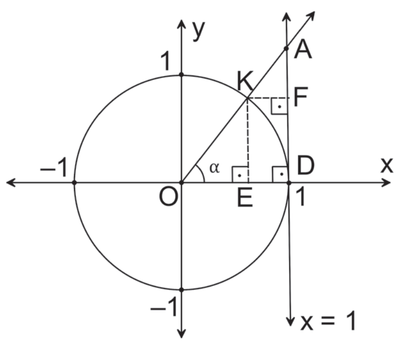
$$=(1+2\sin x\cdot\cos x)\cdot\frac{\cancel{\sin x\cdot\cos x}}{\cos x+\sin x}\cdot\frac{1}{\cancel{\sin x\cdot\cos x}}$$

$$=\frac{1+2\sin x\cdot\cos x}{\cos x+\sin x}\ \text{elde edilir.}$$

Bu ifadede 1 yerine $\sin^2x+\cos^2x$ yazılırsa

$\dfrac{\sin^2x+\cos^2x+2\sin x\cdot\cos x}{\sin x+\cos x}=\dfrac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin x+\cos x}=\sin x+\cos x$ olur.

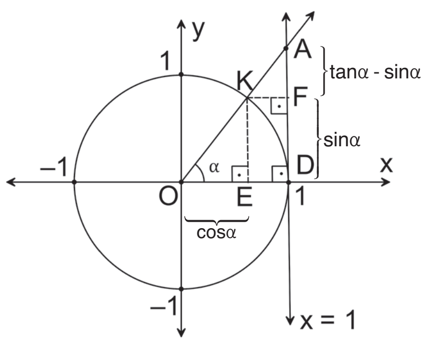
Örnek 15



Yandaki birim çemberde $m(\widehat{EOK})=\alpha$ olarak verilmiştir.

$\dfrac{|AF|}{|ED|}=\dfrac{\tan\alpha-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm



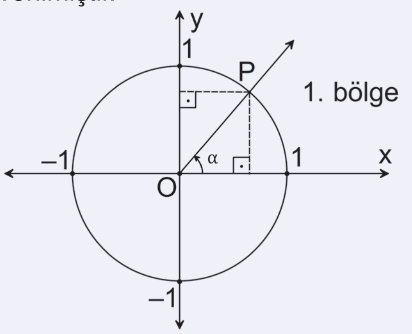
Yandaki şekilde $|AD|=\tan\alpha$, $|OE|=\cos\alpha$ ve $|KE|=|FD|=\sin\alpha$,
$|AF|=|AD|-|FD|=\tan\alpha-\sin\alpha$ ve $|ED|=1-\cos\alpha$

olarak yazılabilir. Buradan $\dfrac{|AF|}{|ED|}=\dfrac{\tan\alpha-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$ olur.

Trigonometrik Fonksiyonların Bölgelere Göre İşaretleri

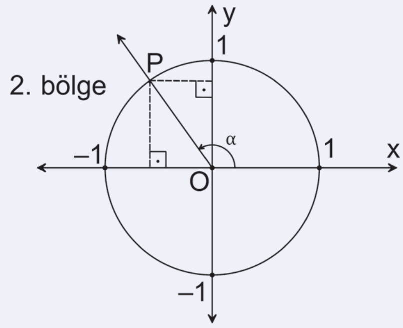
Bilgi

Sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının birim çemberdeki bölgelere göre işaretleri aşağıdaki şekillerle verilmiştir.



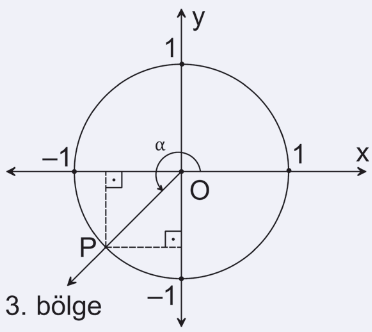
$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ iken

$0 < \cos\alpha < 1$ ve $0 < \sin\alpha < 1$ olur.



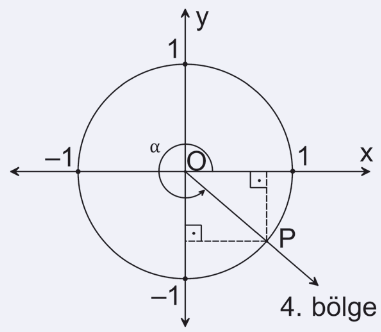
$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ iken

$-1 < \cos\alpha < 0$ ve $0 < \sin\alpha < 1$ olur.



$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ iken

$-1 < \cos\alpha < 0$ ve $-1 < \sin\alpha < 0$ olur.



$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ iken

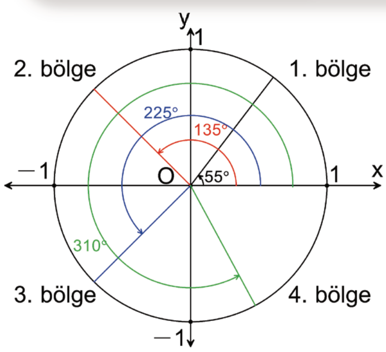
$0 < \cos\alpha < 1$ ve $-1 < \sin\alpha < 0$ olur.

Buna göre sinüs fonksiyonu 1 ve 2. bölgede pozitif, 3 ve 4. bölgede ise negatiftir. Kosinüs fonksiyonu ise 1 ve 4. bölgede pozitif, 2 ve 3. bölgede ise negatiftir.

Örnek 16

$\sin 55^\circ$, $\cos 135^\circ$, $\sin 225^\circ$, $\cos 310^\circ$ değerlerinin işaretlerini bulunuz.

Çözüm



55° lik bir açının bitim kolu birim çemberi 1. bölgede kestiğinden $\sin 55^\circ$ pozitiftir.
135° lik bir açının bitim kolu birim çemberi 2. bölgede kestiğinden $\cos 135^\circ$ negatiftir.
225° lik bir açının bitim kolu birim çemberi 3. bölgede kestiğinden $\sin 225^\circ$ negatiftir.
310° lik bir açının bitim kolu birim çemberi 4. bölgede kestiğinden $\cos 310^\circ$ pozitiftir.

Örnek 17

$\sin(-70^\circ)$, $\cos(-140^\circ)$, $\sin 1200^\circ$ değerlerinin işaretlerini bulunuz.

Çözüm

-70° nin esas ölçüsü $360^\circ - 70^\circ = 290^\circ$ lik bir açının bitim kolu birim çemberi 4. bölgede kestiğinden $\sin 290^\circ$ negatiftir.

-140° nin esas ölçüsü $360^\circ - 140^\circ = 220^\circ$ olur. 220° lik bir açının bitim kolu birim çemberi 3. bölgede kestiğinden $\cos 220^\circ$ negatiftir.

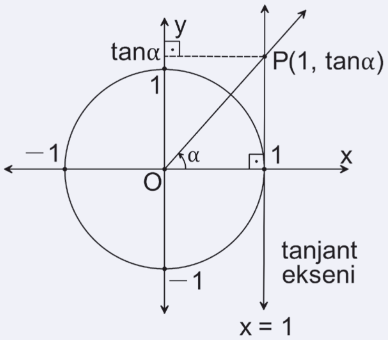
1200° nin esas ölçüsünü bulmak için 1200°, 360° ye bölünürse

$$\begin{array}{r|l} 1200 & 360 \\ \cline{2-2} -\ 1080 & 3 \\ \hline 120 & \end{array}$$

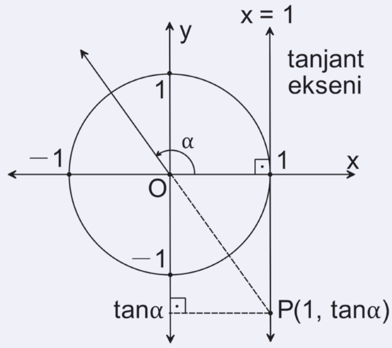
$1200^\circ = 120^\circ + 3 \cdot 360^\circ$ olup esas ölçüsü 120° dir. 120° lik bir açının bitim kolu birim çemberi 2. bölgede kestiğinden $\sin 120^\circ$ pozitiftir.

Bilgi

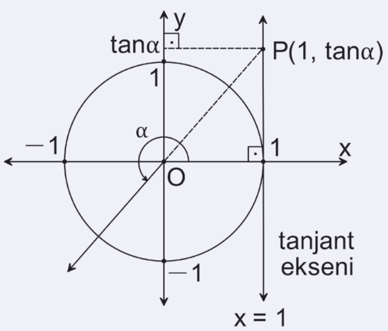
Tanjant fonksiyonunun birim çemberdeki bölgelere göre işaretleri aşağıdaki şekillerle verilmiştir.



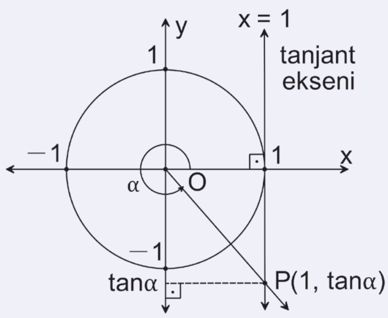
$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ iken $\tan\alpha > 0$



$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ iken $\tan\alpha < 0$



$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ iken $\tan\alpha > 0$

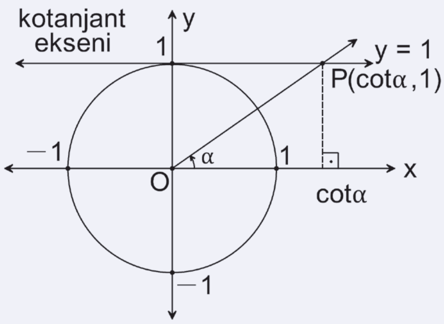


$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ iken $\tan\alpha < 0$

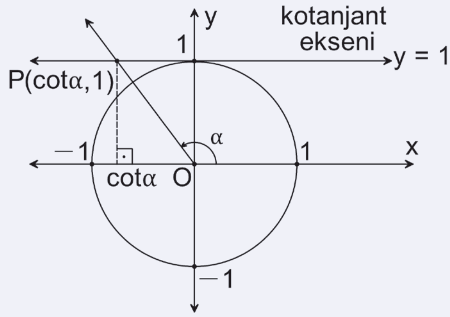
Sonuç olarak tanjant fonksiyonu 1 ve 3. bölgede pozitif, 2 ve 4. bölgede ise negatiftir.

Bilgi

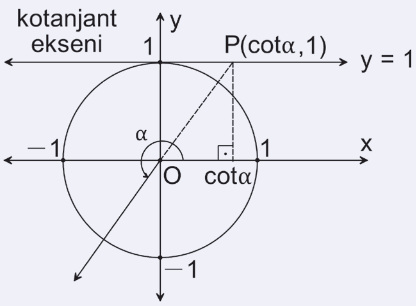
Kotanjant fonksiyonunun birim çemberdeki bölgelere göre işaretleri aşağıdaki şekillerle verilmiştir.



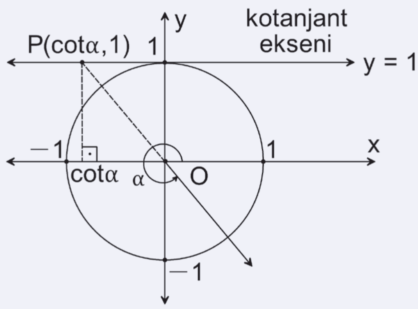
$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ iken $\cot\alpha > 0$



$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ iken $\cot\alpha < 0$



$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ iken $\cot\alpha > 0$



$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ iken $\cot\alpha < 0$

Sonuç olarak kotanjant fonksiyonu 1 ve 3. bölgede pozitif, 2 ve 4. bölgede ise negatiftir.

Örnek 18

$\tan 80^\circ$, $\cot 110^\circ$, $\tan 230^\circ$, $\cot 305^\circ$ değerlerinin işaretlerini bulunuz.

Çözüm

Ölçüsü 80° olan bir açının bitim kolu $x = 1$ doğrusunu 1. bölgede kestiğinden $\tan 80^\circ$ pozitiftir.
Ölçüsü 110° olan bir açının bitim kolu $y = 1$ doğrusunu 2. bölgede kestiğinden $\cot 110^\circ$ negatiftir.
Ölçüsü 230° olan bir açının bitim kolu uzatıldığında $x = 1$ doğrusunu 1. bölgede kestiğinden $\tan 230^\circ$ pozitiftir.
Ölçüsü 305° lik bir açının bitim kolu uzatıldığında $y = 1$ doğrusunu 2. bölgede kestiğinden $\cot 305^\circ$ negatiftir.

Örnek 19

$\sec 155^\circ$, $\mathrm{cosec}\,205^\circ$, $\sec 325^\circ$ değerlerinin işaretlerini bulunuz.

Çözüm

$\sec 155^\circ = \dfrac{1}{\cos 155^\circ}$ olup ölçüsü 155° olan bir açının bitim kolu birim çemberi 2. bölgede kestiğinden $\cos 155^\circ$ negatiftir. Buradan $\sec 155^\circ$ negatiftir.

$\mathrm{cosec}\,205^\circ = \dfrac{1}{\sin 205^\circ}$ olup ölçüsü 205° olan bir açının bitim kolu birim çemberi 3. bölgede kestiğinden $\sin 205^\circ$ negatiftir. Buradan $\mathrm{cosec}\,205^\circ$ negatiftir.

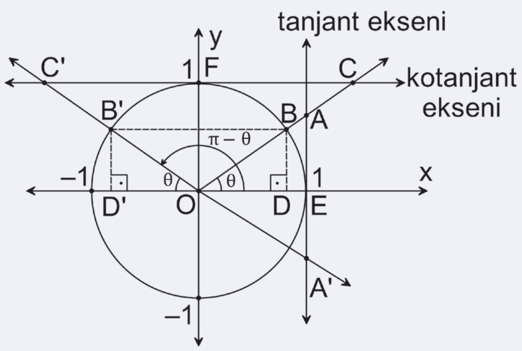
$\sec 325^\circ = \dfrac{1}{\cos 325^\circ}$ olup ölçüsü 325° olan bir açının bitim kolu birim çemberi 4. bölgede kestiğinden $\cos 325^\circ$ pozitiftir. Buradan $\sec 325^\circ$ pozitiftir.

Sıra Sizde

$x = \tan 265^\circ$, $y = \cot 335^\circ$, $z = \sec 125^\circ$ ve $t = \mathrm{cosec}\,280^\circ$ olarak veriliyor. Buna göre x, y, z ve t'nin işaretlerini bulunuz.

Bilgi

$\dfrac{k\pi}{2} \pm \theta \ (k \in \mathbb{Z}^+)$ Açıların Trigonometrik Değerleri



Yanda verilen O merkezli birim çember üzerindeki B noktasının y eksenine göre simetriği B', A noktasının x eksenine göre simetriği A', C noktasının y eksenine göre simetriği C' olsun. θ dar açı olmak üzere θ ve $\pi - \theta$ açılarının trigonometrik oranları arasında aşağıdaki eşitlikler vardır.

$\widehat{BDO} \cong \widehat{B'D'O}$ olduğundan
$|BD| = |B'D'|$ olup $\sin\theta = |BD|$ ve $\sin(\pi - \theta) = |B'D'|$,
$|OD| = |OD'|$ olup $\cos\theta = |OD|$ ve
$\cos(\pi - \theta) = -|OD'|$, $\widehat{EAO} \cong \widehat{EA'O}$ olduğundan
$|EA| = |EA'|$ olup $\tan\theta = |EA|$ ve $\tan(\pi - \theta) = -|EA'|$,

$\widehat{FCO} \cong \widehat{FC'O}$ olduğundan $|FC| = |FC'|$ olup $\cot\theta = |FC|$ ve $\cot(\pi - \theta) = -|FC'|$ olur. Buradan

$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$,
$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$,
$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$,
$\cot(\pi - \theta) = -\cot\theta$ olarak yazılır.

Sonuç olarak birbirini 180° ye tamamlayan iki açının

- Sinüsleri birbirine eşit olur.
- Kosinüsleri birbirinin ters işaretlisidir.
- Tanjantları birbirinin ters işaretlisidir.
- Kotanjantları birbirinin ters işaretlisidir.

Örnek 20

Ölçüsü 150° olan bir açının sinüs, kosinüs, tanjant ve kotanjant değerlerini bulunuz.

Çözüm

$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$,

$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\cot 150^\circ = \cot(180^\circ - 30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$ olarak bulunur.

Sıra Sizde

Ölçüsü 120° olan bir açının sinüs, kosinüs, tanjant ve kotanjant değerlerini bulunuz.

Örnek 21

$\dfrac{\sin 160^\circ \cdot \cos 40^\circ}{\cos 140^\circ \cdot \sin 20^\circ}$ ifadesinin değerini bulunuz.

Çözüm

$\sin 160^\circ = \sin(180^\circ - 20^\circ) = \sin 20^\circ$ ve $\cos 140^\circ = \cos(180^\circ - 40^\circ) = -\cos 40^\circ$ olup bu değerler verilen ifadede yerlerine yazılırsa

$\dfrac{\sin 160^\circ \cdot \cos 40^\circ}{\cos 140^\circ \cdot \sin 20^\circ} = \dfrac{\cancel{\sin 20^\circ} \cdot \cancel{\cos 40^\circ}}{\cancel{-\cos 40^\circ} \cdot \cancel{\sin 20^\circ}} = -1$ olarak bulunur.

Örnek 22

$0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ olmak üzere $\dfrac{\sin(7\pi - \alpha) \cdot \cot(11\pi - \alpha)}{\cos(3\pi - \alpha)}$ ifadesinin değerini hesaplayınız.

Çözüm

$7\pi - \alpha = 6\pi + \pi - \alpha$ olarak yazılırsa ölçüsü $7\pi - \alpha$ olan bir açının esas ölçüsü $\pi - \alpha$,
$11\pi - \alpha = 10\pi + \pi - \alpha$ olarak yazılırsa ölçüsü $11\pi - \alpha$ olan bir açının esas ölçüsü $\pi - \alpha$,
$3\pi - \alpha = 2\pi + \pi - \alpha$ olarak yazılırsa ölçüsü $3\pi - \alpha$ olan bir açının esas ölçüsü $\pi - \alpha$ olur.
Buradan

$\dfrac{\sin(7\pi - \alpha) \cdot \cot(11\pi - \alpha)}{\cos(3\pi - \alpha)} = \dfrac{\sin(\pi - \alpha) \cdot \cot(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = \dfrac{\sin\alpha \cdot (-\cot\alpha)}{-\cos\alpha} = \dfrac{\cancel{\sin\alpha} \cdot \dfrac{\cos\alpha}{\cancel{\sin\alpha}}}{\cos\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha} = 1$ olur.

Örnek 23

$A = \dfrac{\sec 135^\circ - \operatorname{cosec} 135^\circ}{\tan 135^\circ}$ olduğuna göre A değerini bulunuz.

Çözüm

$\sec 135^\circ = \dfrac{1}{\cos 135^\circ} = \dfrac{1}{\cos(180^\circ - 45^\circ)} = \dfrac{1}{-\cos 45^\circ} = \dfrac{1}{\frac{-\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2},$

$\operatorname{cosec} 135^\circ = \dfrac{1}{\sin 135^\circ} = \dfrac{1}{\sin(180^\circ - 45^\circ)} = \dfrac{1}{\sin 45^\circ} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$

$\tan 135^\circ = \tan(180^\circ - 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$ olur. Buradan

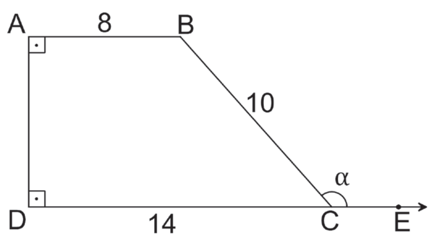
$A = \dfrac{\sec 135^\circ - \operatorname{cosec} 135^\circ}{\tan 135^\circ} = \dfrac{-\sqrt{2} - \sqrt{2}}{-1} = \dfrac{-2\sqrt{2}}{-1} = 2\sqrt{2}$ olur.

Sıra Sizde

Aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz.

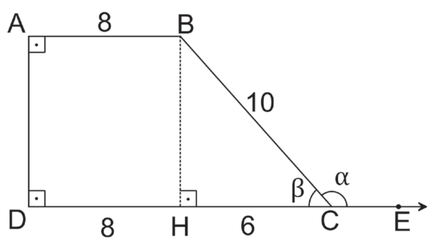
α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$\sec\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$
120°						
135°			-1		$-\sqrt{2}$	
150°						2

Örnek 24



Yandaki şekilde ABCD bir dik yamuk ve $m(\widehat{BAD}) = 90^\circ$ olmak üzere $[AB] \parallel [DC]$; D, C ve E noktaları doğrusaldır. $|AB| = 8$ cm, $|BC| = 10$ cm ve $|DC| = 14$ cm'dir $m(\widehat{BCE}) = \alpha$ olduğuna göre $\tan\alpha$ değerini bulunuz.

Çözüm



$[BH] \perp [DC]$ olacak şekilde $[BH]$ çizilirse ABHD dikdörtgen olduğundan $|AB| = |DH| = 8$ cm ve $|HC| = 14 - 8 = 6$ cm olur.

$\widehat{BHC}$'nde Pisagor teoremi uygulanırsa

$|BC|^2 = |BH|^2 + |HC|^2$

$10^2 = |BH|^2 + 6^2$

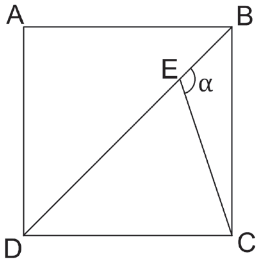
$100 - 36 = |BH|^2$

$|BH|^2 = 64$ ise $|BH| = 8$ cm bulunur.

$m(\widehat{BCH}) = \beta$ denilirse $\tan\beta = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$ olur.

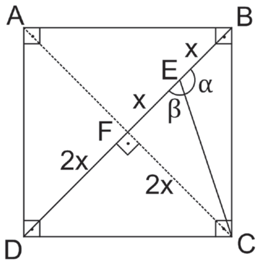
$\alpha + \beta = 180^\circ$ olduğundan $\tan\beta = \tan(180^\circ - \alpha) = -\tan\alpha = \dfrac{4}{3}$ olup $\tan\alpha = -\dfrac{4}{3}$ olarak bulunur.

Örnek 25



Yandaki şekilde ABCD bir kare ve D, E, B noktaları doğrusaldır.
$|DE| = 3|EB|$ ve $m(\widehat{CEB}) = \alpha$ olduğuna göre $\cos\alpha$ değerini bulunuz.

Çözüm



Verilen şekilde A ile C noktaları birleştirilerek AC köşegeni elde edilir.
$|EB| = x$ ise $|ED| = 3x$, $|DB| = 4x$ olur. ABCD karesinde köşegenlerin kesim noktası F olsun. Karenin köşegenleri birbirini dik ortalayacağından
$|DF| = |FB| = |FC| = 2x$ ve buradan $|FE| = x$ olur.
EFC dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

$|EC|^2 = |EF|^2 + |FC|^2$

$|EC|^2 = x^2 + 4x^2$

$|EC|^2 = 5x^2$

$|EC| = \sqrt{5}\cdot x$ olur.

$m(\widehat{FEC}) = \beta$ denilirse $\alpha + \beta = 180^\circ$ olur. Buradan $\cos\beta = \cos(180^\circ - \alpha) = \dfrac{x}{\sqrt{5}\cdot x}$

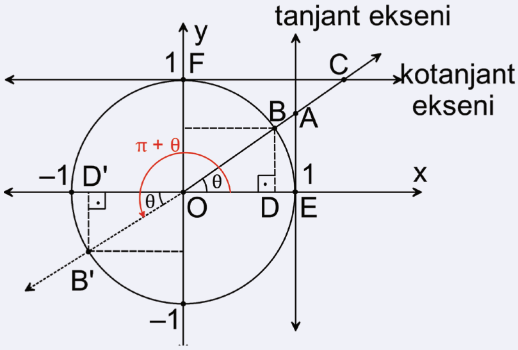
$$-\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}\ (\sqrt{5})$$

$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$ olarak bulunur.

Bilgi

Aşağıda verilen O merkezli birim çember üzerindeki B noktasının orijine göre simetriği B', D noktasının y eksenine göre simetriği D' ve θ dar açı olmak üzere ölçüleri θ ve $\pi + \theta$ olan açıların trigonometrik oranları arasında aşağıdaki eşitlikler vardır.



$\widehat{BDO} \cong \widehat{B'D'O}$ olduğundan

$|BD| = |B'D'|$ olup $\sin\theta = |BD|$ ve $\sin(\pi + \theta) = -|B'D'|$,

$|OD| = |OD'|$ olup $\cos\theta = |OD|$ ve $\cos(\pi + \theta) = -|OD'|$,

$|AE| = \tan\theta$ olup $\tan(\pi + \theta) = |AE|$,

$|FC| = \cot\theta$ olup $\cot(\pi + \theta) = |FC|$ olur. Buradan

$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$,

$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$,

$\tan(\pi + \theta) = \tan\theta$,

$\cot(\pi + \theta) = \cot\theta$ olarak yazılır.

Örnek 26

Ölçüsü 210° olan açının sinüs, kosinüs, tanjant ve kotanjant değerlerini bulunuz.

Çözüm

$210^\circ = 180^\circ + 30^\circ$ olarak yazılabilir. Buradan

$\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$,

$\cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\tan 210^\circ = \tan(180^\circ + 30^\circ) = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\cot 210^\circ = \cot(180^\circ + 30^\circ) = \cot 30^\circ = \sqrt{3}$ olarak bulunur.

Sıra Sizde

Aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz.

α	210°	225°	240°
$\sin\alpha$			
$\cos\alpha$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$\tan\alpha$			$\sqrt{3}$
$\cot\alpha$			

Örnek 27

$\dfrac{\sin 205^\circ \cdot \tan 200^\circ \cdot \tan 135^\circ}{\tan 160^\circ \cdot \sin 155^\circ}$ ifadesinin değerini bulunuz.

Çözüm

$\sin 205^\circ = \sin(180^\circ + 25^\circ) = -\sin 25^\circ$,

$\tan 200^\circ = \tan(180^\circ + 20^\circ) = \tan 20^\circ$,

$\tan 135^\circ = \tan(180^\circ - 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$,

$\tan 160^\circ = \tan(180^\circ - 20^\circ) = -\tan 20^\circ$,

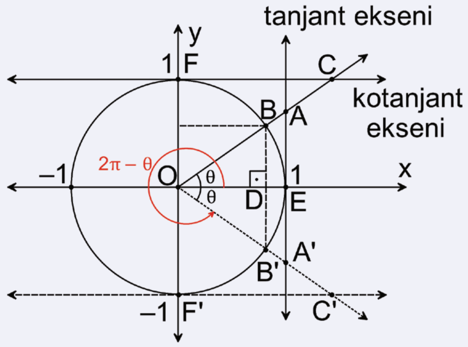
$\sin 155^\circ = \sin(180^\circ - 25^\circ) = \sin 25^\circ$ olup bu değerler verilen ifadede yerine yazılırsa

$\dfrac{\sin 205^\circ \cdot \tan 200^\circ \cdot \tan 135^\circ}{\tan 160^\circ \cdot \sin 155^\circ} = \dfrac{-\sin 25^\circ \cdot \tan 20^\circ \cdot (-1)}{-\tan 20^\circ \cdot \sin 25^\circ} = \dfrac{\cancel{\sin 25^\circ} \cdot \cancel{\tan 20^\circ}}{\cancel{-\tan 20^\circ} \cdot \cancel{\sin 25^\circ}} = -1$ olarak bulunur.

Sıra Sizde

$\dfrac{\sin 50^\circ \cdot \tan 260^\circ \cdot \cot 120^\circ}{\tan 100^\circ \cdot \sin 230^\circ}$ ifadesinin değerini bulunuz.

Bilgi



Yanda verilen O merkezli birim çember üzerindeki B noktasının x eksenine göre simetriği B', C noktasının x eksenine göre simetriği C', A noktasının x eksenine göre simetriği A' ve θ dar açı olmak üzere $\widehat{DBO} \cong \widehat{DB'O}$ olduğundan $|DB| = |DB'|$ olup $|DB| = \sin\theta$ ve $\sin(2\pi - \theta) = -|DB'|$, $|OD| = \cos\theta$ ve $\cos(2\pi - \theta) = |OD|$; $\widehat{EAO} \cong \widehat{EA'O}$ olduğundan $|EA| = |EA'|$ olup $|EA| = \tan\theta$ ve $\tan(2\pi - \theta) = -|EA'|$; $\widehat{FCO} \cong \widehat{F'C'O}$ olduğundan $|FC| = |F'C'|$ olup $|FC| = \cot\theta$ ve $\cot(2\pi - \theta) = -|FC'|$ olur.

Buradan $\sin(2\pi - \theta) = -\sin\theta$ ve $\cos(2\pi - \theta) = \cos\theta$, $\tan(2\pi - \theta) = -\tan\theta$ ve $\cot(2\pi - \theta) = -\cot\theta$ olur.

Elde edilen bu eşitlikler yardımıyla $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ ve $\cos(-\theta) = \cos\theta$, $\tan(-\theta) = -\tan\theta$ ve $\cot(-\theta) = -\cot\theta$ olarak yazılabilir.

Örnek 28

Ölçüsü 315° olan açının sinüs, kosinüs, tanjant ve kotanjant değerlerini bulunuz.

Çözüm

$\sin(315^\circ) = \sin(360^\circ - 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\cos(315^\circ) = \cos(360^\circ - 45^\circ) = \cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\tan(315^\circ) = \tan(360^\circ - 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$,

$\cot(315^\circ) = \cot(360^\circ - 45^\circ) = -\cot 45^\circ = -1$ olur.

Örnek 29

Ölçüsü $-\frac{\pi}{3}$ radyan olan açının sinüs, kosinüs, tanjant ve kotanjant değerlerini bulunuz.

Çözüm

$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$,

$\cot\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\cot\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ olarak yazılır.

Sıra Sizde

Aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz.

α	300°	330°	-45°	-60°
$\sin\alpha$		$-\frac{1}{2}$		
$\cos\alpha$				
$\tan\alpha$				$-\sqrt{3}$
$\cot\alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$			

Örnek 30

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $(\tan(\alpha - \pi) - \sec(-\alpha)) \cdot (1 + \sin(5\pi - \alpha)) = -\cos\alpha$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$\tan(\alpha - \pi) = \tan(-(\pi - \alpha)) = -\tan(\pi - \alpha) = -(-\tan\alpha) = \tan\alpha$,

$\sec(-\alpha) = \frac{1}{\cos(-\alpha)} = \frac{1}{\cos\alpha}$,

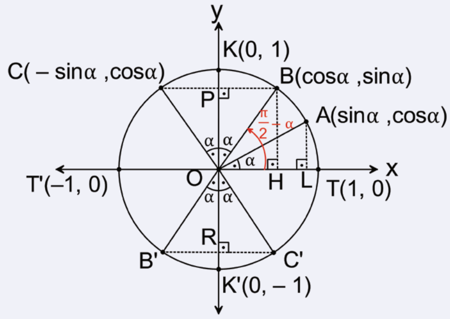
$5\pi - \alpha = 4\pi + \pi - \alpha$ ise ölçüsü $5\pi - \alpha$ olan açının esas ölçüsü $\pi - \alpha$'dır.

Buradan $\sin(5\pi - \alpha) = \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ olur. Elde edilen bu değerler

$(\tan(\alpha - \pi) - \sec(-\alpha)) \cdot (1 + \sin(5\pi - \alpha))$ ifadesinde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\left(\tan\alpha - \frac{1}{\cos\alpha}\right) \cdot (1 + \sin\alpha) &= \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{1}{\cos\alpha}\right) \cdot (1 + \sin\alpha)\\ &= \left(\frac{\sin\alpha - 1}{\cos\alpha}\right) \cdot (1 + \sin\alpha)\\ &= \left(\frac{\sin^2\alpha - 1}{\cos\alpha}\right)\\ &= \left(\frac{-\cos^2\alpha}{\cos\alpha}\right) = -\cos\alpha \text{ olur.}\end{aligned}$$

Bilgi



Açı kenar açı eşliğinden $\widehat{LOA} \cong \widehat{POB} \cong \widehat{POC} \cong \widehat{ROB'} \cong \widehat{ROC'}$ olur. Buradan

$\frac{\pi}{2}-\alpha$ açısının bitim noktası $B(\sin\alpha,\ \cos\alpha)$,

$\frac{\pi}{2}+\alpha$ açısının bitim noktası $C(-\sin\alpha,\ \cos\alpha)$,

Bu durumda $A(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ ve $B(\sin\alpha,\ \cos\alpha)$ noktaları kullanılarak $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$, $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$ ve $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$ olarak yazılabilir. **Ölçüleri toplamı 90° olan iki açıdan birinin ölçüsünün sinüsü diğerinin ölçüsünün kosinüsüne, birinin ölçüsünün tanjantı diğerinin ölçüsünün kotanjantına eşittir.**

$A(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ ve $C(-\sin\alpha,\ \cos\alpha)$, noktaları kullanılarak

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$,

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$,

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\cot\alpha \text{ ve } \cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\tan\alpha \text{ olur.}$$

Benzer şekilde aşağıdaki eşitlikler bulunabilir.

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$,

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$,

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha}=\cot\alpha \text{ ve } \cot\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha}=\tan\alpha \text{ olur.}$$

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$,

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$,

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\cot\alpha \text{ ve } \cot\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}=-\tan\alpha \text{ olur.}$$

Örnek 31

$\dfrac{\sin 20^\circ \cdot \cos 155^\circ \cdot \tan 200^\circ}{\sin 65^\circ \cdot \cot 70^\circ \cdot \cos 250^\circ}$ ifadesinin değerini bulunuz.

Çözüm

$\cos 155^\circ = \cos(90^\circ + 65^\circ) = -\sin 65^\circ$,

$\tan 200^\circ = \tan(270^\circ - 70^\circ) = \cot 70^\circ$,

$\cos 250^\circ = \cos(270^\circ - 20^\circ) = -\sin 20^\circ$ olur.

Bu değerler verilen ifadede yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\frac{\sin 20^\circ \cdot \cos 155^\circ \cdot \tan 200^\circ}{\sin 65^\circ \cdot \cot 70^\circ \cdot \cos 250^\circ} &= \frac{\sin 20^\circ \cdot (-\sin 65^\circ) \cdot \cot 70^\circ}{\sin 65^\circ \cdot \cot 70^\circ \cdot (-\sin 20^\circ)}\\ &= \frac{\cancel{\sin 20^\circ} \cdot \cancel{\sin 65^\circ} \cdot \cancel{\cot 70^\circ}}{\cancel{\sin 65^\circ} \cdot \cancel{\cot 70^\circ} \cdot \cancel{\sin 20^\circ}}\\ &= 1 \text{ olur.}\end{aligned}$$

Örnek 32

Bir ABC üçgeninde $m(\widehat{A}) = \alpha$, $m(\widehat{B}) = \beta$ ve $m(\widehat{C}) = \theta$ olmak üzere $\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

Bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° olduğundan $\alpha + \beta + \theta = 180^\circ$ olur. Bu eşitlikten

$\alpha + \beta = 180^\circ - \theta$

$\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \dfrac{180^\circ - \theta}{2}$

$\dfrac{\alpha+\beta}{2} = 90^\circ - \dfrac{\theta}{2}$ olur.

$\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ ifadesinde $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ yerine $90 - \dfrac{\theta}{2}$ yazılırsa

$\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) = \sin\left(90^\circ - \dfrac{\theta}{2}\right) = \cos\dfrac{\theta}{2}$ olur.

Sıra Sizde

$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ olmak üzere $\left[\cos(\pi + \alpha) - \sin\left(\dfrac{5\pi}{2} - \alpha\right)\right] : (\cos\alpha) = -2$ olduğunu gösteriniz.

Sıra Sizde

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $[\text{cosec}(2\pi - \alpha) - \cot(3\pi - \alpha)] : \left[\frac{1}{\sec(-\alpha) + 1}\right] = -\tan\alpha$ olduğunu gösteriniz.

Örnek 33

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere aşağıda verilen ifadeleri en sade hâliyle yazınız.

a) $\cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right)$

b) $\tan\left(\frac{11\pi}{2} + \alpha\right)$

c) $\sin\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right)$

ç) $\cot\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$

Çözüm

a) $\cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(2\pi + \overbrace{\frac{3\pi}{2} - \alpha}^{\text{esas ölçü}})$

$= \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$

$= -\sin\alpha$ olur.

b) $\tan\left(\frac{11\pi}{2} + \alpha\right) = \tan(4\pi + \overbrace{\frac{3\pi}{2} + \alpha}^{\text{esas ölçü}})$

$= \tan\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$

$= -\cot\alpha$ olur

c) $\sin\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right) = \sin\left(-\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right)\right)$

$= -\sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right)$

$= -\sin(2\pi + \overbrace{\frac{\pi}{2} - \alpha}^{\text{esas ölçü}})$

$= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

$= -\cos\alpha$ olur.

ç) $\cot\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \cot\left(-\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\right)$

$= -\cot\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$

$= -\tan\alpha$ olur.

Sıra Sizde

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)+\cos(\pi+\alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos\alpha}$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

Örnek 34

x ve y birer dar açı olmak üzere

$x+y=\frac{\pi}{4}$ radyan olduğuna göre $\dfrac{\sin(3x+2y)}{\cos(7x+6y)}$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

Çözüm

$$\frac{\sin(3x+2y)}{\cos(7x+6y)}=\frac{\sin(x+(2x+2y))}{\cos(x+(6x+6y))}$$

$$=\frac{\sin(x+2\overbrace{(x+y)}^{\frac{\pi}{4}})}{\cos(x+6\underbrace{(x+y)}_{\frac{\pi}{4}})}=\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)}=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x \text{ olur.}$$

Örnek 35

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere

$\dfrac{\cos(\pi+\alpha)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\cot(-\alpha)-\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

Çözüm

$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$, $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$, $\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$ ve $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$ olur. Elde edilen bu değerler verilen ifadede yerine yazılırsa

$$\frac{\cos(\pi+\alpha)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\cot(-\alpha)-\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{-\cos\alpha-\cos\alpha}{-\cot\alpha-\cot\alpha}$$

$$=\frac{\cancel{-2}\cos\alpha}{\cancel{-2}\cot\alpha}$$

$$=\frac{\cos\alpha}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

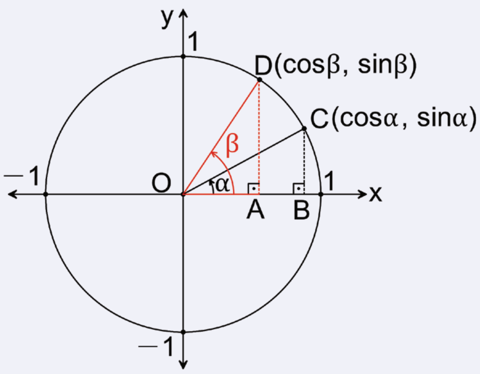
$$=\cancel{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cancel{\cos\alpha}}=\sin\alpha \text{ olur.}$$

Sıra Sizde

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $\dfrac{\sin\left(\frac{13\pi}{2}+\alpha\right)-\cos(\pi+\alpha)}{\sin\left(\frac{27\pi}{2}-\alpha\right)}$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

Trigonometrik Fonksiyonların Açı Değerlerine Göre Sıralanması

Bilgi



Yukarıda verilen O merkezli birim çemberde $m(\widehat{BOC})=\alpha$ ve $m(\widehat{AOD})=\beta$ olarak verilmiştir. Buradan

- $|CB|=\sin\alpha$ ve $|DA|=\sin\beta$ olarak yazılabilir. $\alpha<\beta$ için $|CB|<|DA|$ olduğundan $\sin\alpha<\sin\beta$ olur. Buradan 1. bölgede açı değerleri arttıkça bu açıların sinüs değerleri de artar. Örneğin $\sin5^\circ<\sin25^\circ<\sin50^\circ<\sin75^\circ$ olarak yazılır.

- $|OB|=\cos\alpha$ ve $|OA|=\cos\beta$ olarak yazılabilir. $\alpha<\beta$ için $|OB|>|OA|$ olduğundan $\cos\alpha>\cos\beta$ olur. Buradan 1. bölgede açı değerleri arttıkça bu açıların kosinüs değerleri de azalır. Örneğin $\cos5^\circ>\cos25^\circ>\cos50^\circ>\cos75^\circ$ olarak yazılır.

Örnek 36

$\sin 50^\circ$, $\sin 160^\circ$, $\sin 260^\circ$, $\sin 340^\circ$ değerlerini küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

Çözüm

$\sin 160^\circ = \sin(180^\circ - 20^\circ) = \sin 20^\circ$
$\sin 260^\circ = \sin(180^\circ + 80^\circ) = -\sin 80^\circ$
$\sin 340^\circ = \sin(360^\circ - 20^\circ) = -\sin 20^\circ$ olarak düzenlenirse $-\sin 80^\circ < -\sin 20^\circ < \sin 20^\circ < \sin 50^\circ$ olduğundan $\sin 260^\circ < \sin 340^\circ < \sin 160^\circ < \sin 50^\circ$ olur.

Örnek 37

$\cos 70^\circ$, $\cos 200^\circ$, $\cos 325^\circ$ değerlerini küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

Çözüm

$\cos 200^\circ = \cos(180^\circ + 20^\circ) = -\cos 20^\circ$
$\cos 325^\circ = \cos(360^\circ - 35^\circ) = \cos 35^\circ$
olarak düzenlenirse $-\cos 20^\circ < \cos 70^\circ < \cos 35^\circ$ olduğundan $\cos 200^\circ < \cos 70^\circ < \cos 325^\circ$ olur.

Örnek 38

$\cos 320^\circ$, $\sin 75^\circ$, $\sin 115^\circ$ değerlerini küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

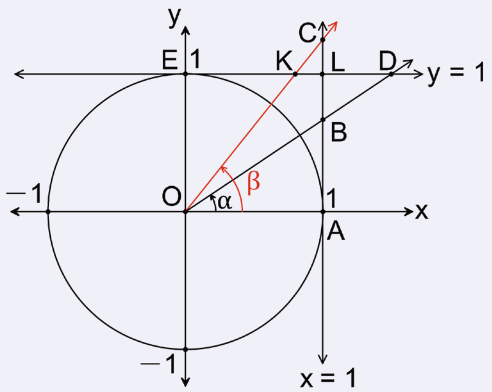
Çözüm

Verilen $\cos 320^\circ$ ifadesi sinüse dönüştürülerek sıralanmaları istenen değerler aynı cinsten yazılır.
$\cos 320^\circ = \cos(270^\circ + 50^\circ) = \sin 50^\circ$ olur.
$\sin 115^\circ = \sin(180^\circ - 65^\circ) = \sin 65^\circ$ olarak düzenlenirse $\sin 50^\circ < \sin 65^\circ < \sin 75^\circ$ olduğundan
$\cos 320^\circ < \sin 115^\circ < \sin 75^\circ$ olur.

Sıra Sizde

$\cos 100^\circ$, $\sin 310^\circ$, $\cos 250^\circ$, $\sin 220^\circ$ değerlerini küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

Bilgi



Yukarıda verilen O merkezli birim çemberde $m(\widehat{AOD}) = \alpha$ ve $m(\widehat{AOC}) = \beta$ olarak verilmiştir. Buradan

- $|AB| = \tan\alpha$ ve $|AC| = \tan\beta$ olarak yazılabilir. $\alpha < \beta$ için $|AB| < |AC|$ olduğundan $\tan\alpha < \tan\beta$ olur. Buradan 1. bölgede açı değerleri arttıkça bu açıların tanjant değerleri de artar. Örneğin $\tan 10^\circ < \tan 35^\circ < \tan 50^\circ < \tan 85^\circ$ olarak yazılır.

- $|ED| = \cot\alpha$ ve $|EK| = \cot\beta$ olarak yazılabilir. $\alpha < \beta$ için $|ED| > |EK|$ olduğundan $\cot\alpha > \cot\beta$ olur. Buradan 1. bölgede açı değerleri arttıkça bu açıların kotanjant değerleri azalır. Örneğin $\cot 10^\circ > \cot 35^\circ > \cot 50^\circ > \cot 85^\circ$ olarak yazılır.

Örnek 39

$\tan 40^\circ$, $\tan 125^\circ$, $\cot 205^\circ$, $\tan 340^\circ$ değerlerini küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

Çözüm

$\tan 125^\circ = \tan(180^\circ - 55^\circ) = -\tan 55^\circ$
$\cot 205^\circ = \cot(270^\circ - 65^\circ) = \tan 65^\circ$
$\tan 340^\circ = \tan(360^\circ - 20^\circ) = -\tan 20^\circ$ olarak düzenlenirse $-\tan 55^\circ < -\tan 20^\circ < \tan 40^\circ < \tan 65^\circ$ olduğundan $\tan 125^\circ < \tan 340^\circ < \tan 40^\circ < \cot 205^\circ$ olur.

Sıra Sizde

$\tan 130^\circ$, $\cot 320^\circ$, $\cot 250^\circ$, $\tan 70^\circ$ değerlerini küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

Bilgi

- $45^\circ \le x < 90^\circ \Rightarrow \tan x \ge 1$ olur. Bu durumda $[45^\circ,\ 90^\circ)$ aralığındaki açıların tanjant, sinüs ve kosinüs değerleri karşılaştırılırken tanx değeri sinüs ve kosinüs değerlerinden daha büyüktür.
- $0^\circ < x < 90^\circ$ için $\sin x < \tan x$ olur.

Örnek 40

$\cot 220^\circ,\ \tan 215^\circ,\ \cos 305^\circ,\ \cos 65^\circ$ değerlerini küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

Çözüm

$\cot 220^\circ = \tan(270^\circ - 50^\circ) = \tan 50^\circ$
$\tan 215^\circ = \tan(180^\circ + 35^\circ) = \tan 35^\circ$
$\cos 305^\circ = \cos(270^\circ + 35^\circ) = \sin 35^\circ$
$\cos 65^\circ = \cos(90^\circ - 25^\circ) = \sin 25^\circ$ olarak düzenlenirse $\sin 25^\circ < \sin 35^\circ < \tan 35^\circ < \tan 50^\circ$ olduğundan
$\cos 65^\circ < \cos 305^\circ < \tan 215^\circ < \cot 220^\circ$ olur.

Sıra Sizde

$\cot 200^\circ,\ \tan 55^\circ,\ \sin 125^\circ,\ \cos 140^\circ$ değerlerini küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

Örnek 41

$a = -\tan 55^\circ,\ b = \sin 250^\circ,\ c = \cot 316^\circ$ olduğuna göre a, b, c değerlerini küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

Çözüm

$b = \sin 250^\circ = \sin(180^\circ + 70^\circ) = -\sin 70^\circ$
$c = \cot 316^\circ = \cot(270^\circ + 46^\circ) = -\tan 46^\circ$ olarak düzenlenirse $-\tan 55^\circ < -\tan 46^\circ < -\sin 70^\circ$ olduğundan
$a < c < b$ olur.

ALIŞTIRMALAR

1. $A = 7 \cdot \sin^2 x - 11$ olduğuna göre A'nın alabileceği kaç farklı tam sayı değeri olduğunu bulunuz.

2. $a = \sin 305^\circ$,
$b = \cos 212^\circ$,
$c = \tan 523^\circ$,
$d = \cot 410^\circ$
olduğuna göre a, b, c ve d'nin işaretlerini bulunuz.

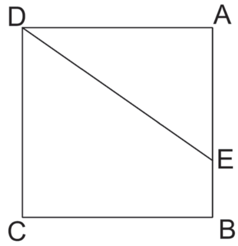
3. $x = \cos\left(\frac{11\pi}{3}\right)$,
$y = \sin\left(-\frac{41\pi}{5}\right)$,
$z = \tan\left(\frac{43\pi}{4}\right)$
olduğuna göre x, y, z'nin işaretlerini bulunuz.

4. $A = 5 \cdot \sin x - 7 \cdot \cos y + 11$ olduğuna göre A'nın alabileceği **en büyük** ve **en küçük** değerin toplamını bulunuz.

5. $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ olmak üzere $\tan\alpha = -\frac{3}{4}$ olduğuna göre $\sin\alpha + \cos\alpha$ değerini bulunuz.

6. Tanımlı olduğu açı değerleri için $\left(\frac{4}{1+\sin x} - \frac{4}{1-\sin x}\right) : \sec^2 x$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

7.



Yukarıdaki şekilde ABCD bir karedir.
$|AE| = 3 \cdot |EB|$ ve $m(\widehat{DEB}) = \alpha$ olduğuna göre $\sin\alpha$ değerini bulunuz.

8. $\tan x - \cot x = 2$ olduğuna göre $\tan^3 x - \cot^3 x$ ifadesinin değerini bulunuz.

9. Tanımlı olduğu açı değerleri için $\frac{(\tan x + \sin x) \cdot \sin^2 x}{-\sin^2 x + 2\cos x + 2} : \frac{1-\cos x}{\cos x}$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

10. $a = \sin 130^\circ$,
$b = \cos 310^\circ$,
$c = \tan 46^\circ$ olarak veriliyor. a, b ve c sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

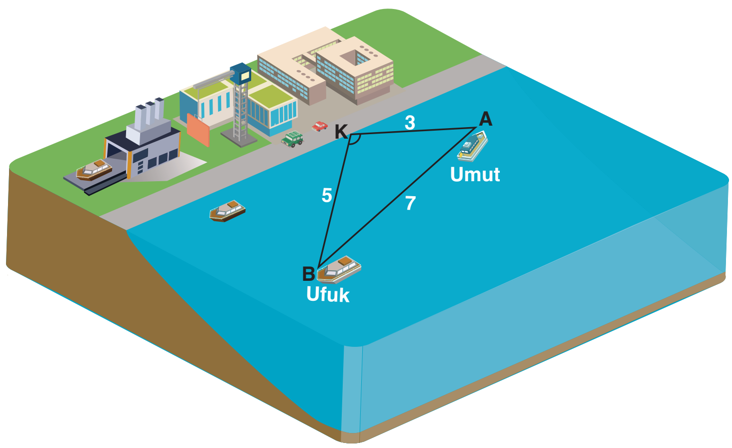
11. $\frac{\sin 210^\circ + \sin 330^\circ - \cos 240^\circ}{\cos 225^\circ \cdot \cos 135^\circ}$

ifadesinin değerini bulunuz.

12. $\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) \cdot \tan\left(\frac{11\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$

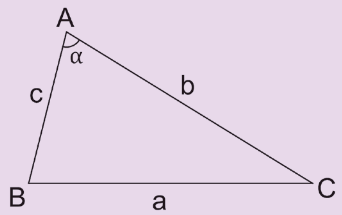
ifadesinin değerini bulunuz.

11.1.2.2. Kosinüs Teoremi

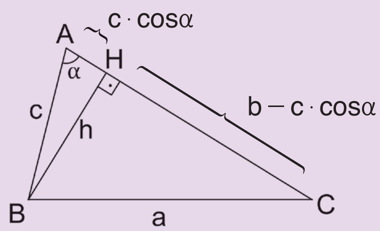


Umut ve Ufuk isimli iki tekne görseldeki limanın K noktasından, kazazedeleri arama kurtarma amacıyla verilen yönlerde doğrusal bir şekilde harekete başlıyor. Umut teknesi 3 km, Ufuk teknesi ise 5 km sonra sırasıyla A ve B noktalarında demir atıyor. İki tekne arası uzaklık 7 km olduğuna göre AKB açısının ölçüsünü nasıl bulabilirsiniz?

Buluyorum



Yandaki şekildeki ABC üçgeninde
$|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BC| = a$ ve $m(\widehat{A}) = \alpha$ olsun.



$|BH| = h$ olacak şekilde B köşesinden AC kenarına ait yükseklik çizilirse
$\cos\alpha = \dfrac{|AH|}{c}$ ve $|AH| = c \cdot \cos\alpha$ olur. Buradan
$|HC| = b - c \cdot \cos\alpha$ olarak yazılır.

BHC dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa
$|BC|^2 = |BH|^2 + |HC|^2$
$a^2 = h^2 + (b - c \cdot \cos\alpha)^2$
$a^2 = h^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos\alpha + c^2 \cdot \cos^2\alpha$ olur ....(I)

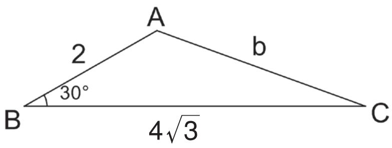
AHB dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa
$|AB|^2 = |BH|^2 + |HA|^2$
$c^2 = h^2 + (c \cdot \cos\alpha)^2$
$h^2 = c^2 - c^2 \cdot \cos^2\alpha$ olur. ....(II)

II. eşitlikte elde edilen h^2 ifadesinin eşiti I. denklemde yerine yazılırsa
$a^2 = c^2 - \cancel{c^2 \cdot \cos^2\alpha} + b^2 - 2bc \cdot \cos\alpha + \cancel{c^2 \cdot \cos^2\alpha}$
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$ elde edilir.

Elde edilen bu teoreme **kosinüs teoremi** adı verilir. Bu teorem uygulanarak

- İki kenar uzunluğu ve bu kenarlar arasındaki açının ölçüsü bilinen bir üçgenin üçüncü kenar uzunluğu,
- Üç kenar uzunluğu bilinen bir üçgenin açılarının kosinüs değerleri bulunabilir.

Örnek 42



Şekildeki ABC üçgeninde $m(\widehat{ABC}) = 30^\circ$, $|AB| = 2$ cm ve $|BC| = 4\sqrt{3}$ cm olarak verilmiştir. Buna göre $|AC| = b$ değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.

Çözüm

ABC üçgeninde kosinüs teoremi uygulanırsa

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\widehat{B}$$

$$b^2 = (4\sqrt{3})^2 + 2^2 - 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \cos 30^\circ$$

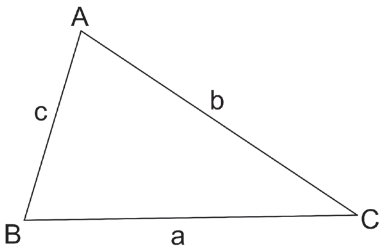
$$b^2 = 48 + 4 - 16\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b^2 = 52 - 24$$

$$b^2 = 28 \Rightarrow b = \sqrt{28}$$

$$b = 2\sqrt{7} \text{ cm olarak bulunur.}$$

Örnek 43



Şekildeki ABC üçgeninin kenar uzunlukları a, b ve c birimdir. Kenar uzunlukları arasında $a^2 = b^2 + c^2 - \sqrt{2} \cdot b \cdot c$ bağıntısı olduğuna göre $m(\widehat{BAC})$'nün kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm

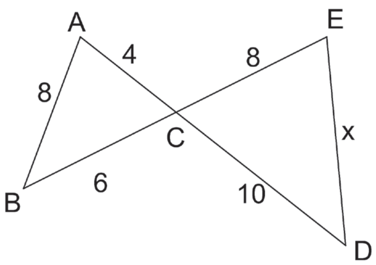
$m(\widehat{BAC}) = \alpha$ olsun. ABC üçgeninde kosinüs teoremi uygulanırsa $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$ olur. Verilen $a^2 = b^2 + c^2 - \sqrt{2} \cdot b \cdot c$ bağıntısındaki a^2 değeri kosinüs teoreminde yerine yazılırsa

$$\cancel{b^2} + \cancel{c^2} - \sqrt{2} \cdot b \cdot c = \cancel{b^2} + \cancel{c^2} - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

$$\frac{-\sqrt{2} \cdot \cancel{b} \cdot \cancel{c}}{-2 \cdot \cancel{b} \cdot \cancel{c}} = \frac{\cancel{-2 \cdot b \cdot c} \cdot \cos\alpha}{\cancel{-2 \cdot b \cdot c}}$$

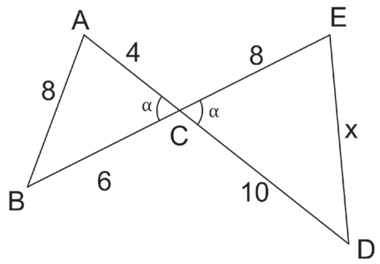
$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ve } \alpha = 45^\circ \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek 44



Yandaki şekilde $[AD] \cap [BE] = \{C\}$; $|AC| = 4$ cm, $|AB| = 8$ cm, $|BC| = 6$ cm, $|CE| = 8$ cm, $|CD| = 10$ cm ve $|ED| = x$ cm olduğuna göre x değerini bulunuz.

Çözüm



$m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{ECD}) = \alpha$ olsun. ACB üçgeninde kosinüs teoremi uygulanırsa

$8^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos\alpha$

$64 = 52 - 48 \cdot \cos\alpha$

$12 = -48 \cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha = -\frac{1}{4}$ olur.

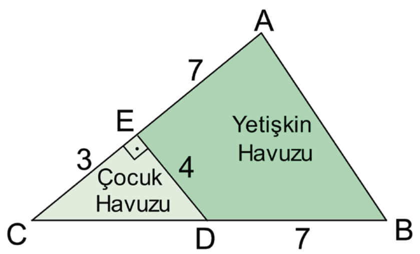
ECD üçgeninde kosinüs teoremi uygulanırsa $x^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \underbrace{\cos\alpha}_{-\frac{1}{4}}$

$x^2 = 164 - 160 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$

$x^2 = 164 + 40$

$x^2 = 204 \Rightarrow x = 2\sqrt{51}$ cm olarak bulunur.

Örnek 45



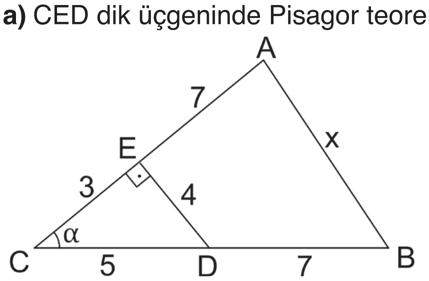
Karanfil Sitesi'nin Yöneticisi Didem Hanım yanda verilen ABC üçgeni şeklindeki site havuzunun D ile E noktaları arasını $[DE] \perp [AC]$ olacak şekilde duvar ile ördürüp CED üçgeni şeklinde bir çocuk havuzu, AEDB dörtgeni şeklinde ise bir yetişkin havuzu yaptıracaktır. $E \in [AC]$ ve $D \in [CB]$; $|EC| = 3$ m, $|ED| = 4$ m, $|DB| = |EA| = 7$ m olduğuna göre

a) Yetişkin havuzunun çevresinin kaç metre olduğunu bulunuz.

b) $\sin(\widehat{ABC})$ **değerini hesaplayınız.**

Çözüm

a) CED dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa



$|CD|^2 = 3^2 + 4^2$

$|CD|^2 = 25$

$|CD| = 5$ m olur.

$|AB| = x$ m, $m(\widehat{ECD}) = \alpha$ olsun. ACB üçgeninde kosinüs teoremi uygulanırsa $x^2 = 10^2 + 12^2 - 2 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \cos\alpha$

$x^2 = 244 - 240 \cdot \cos\alpha$ olur.

CED dik üçgeninde $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ olup $x^2 = 244 - 240 \cdot \cos\alpha$

$x^2 = 244 - 240 \cdot \frac{3}{5}$

$x^2 = 244 - 144$

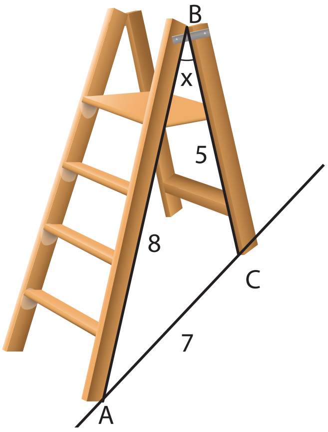
$x^2 = 100$ ve $x = 10$ m bulunur.

Buradan yetişkin havuzun çevresi $10 + 7 + 4 + 7 = 28$ m olur.

b) ABC üçgeni $|AC| = |AB|$ olduğundan bir ikizkenar üçgen olup $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{ABC}) = \alpha$ olur.

$\sin\alpha$ değerini bulmak için CED dik üçgeni kullanılabilir. Buradan $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ olarak bulunur.

Örnek 46



Şekilde verilen merdivenin ayakları düz bir zemin üzerindeki A ve C noktalarındadır. Merdivenin boyu olan $|AB| = 8$ metre, merdivenin destek ayağı $|BC| = 5$ metre ve merdivenin ayakları arasındaki uzaklık $|AC| = 7$ metredir.
ABC açısının ölçüsü x olduğuna göre x'in kaç derece olduğunu bulunuz.

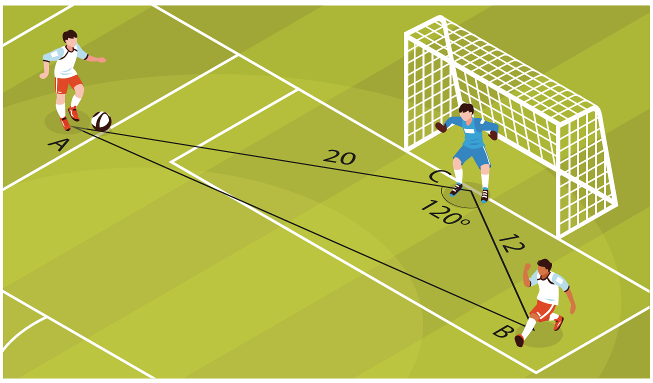
Çözüm

ABC üçgeni için kosinüs teoremi uygulanırsa

$$7^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos x \Rightarrow 49 = 64 + 25 - 80 \cdot \cos x$$
$$\Rightarrow 49 = 89 - 80 \cdot \cos x$$
$$\Rightarrow 80 \cdot \cos x = 40$$
$$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

Buradan $x = 60^\circ$ bulunur.

Örnek 47



Şekilde verilen futbol sahasında A, B ve C noktalarında birer futbolcu bulunmaktadır. A ve B noktalarındaki futbolcuların C noktasındaki kaleciye uzaklıkları sırasıyla 20 metre ve 12 metredir.
$m(\widehat{ACB}) = 120^\circ$ olduğuna göre A ve B noktalarında bulunan futbolcular arasındaki uzaklığın kaç metre olduğunu bulunuz.

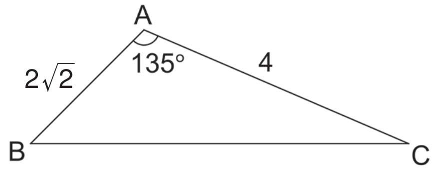
Çözüm

ABC üçgeni için kosinüs teoremi uygulanırsa

$$|AB|^2 = 20^2 + 12^2 - 2 \cdot 20 \cdot 12 \cdot \cos 120^\circ \Rightarrow |AB|^2 = 400 + 144 - 480 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$\Rightarrow |AB|^2 = 544 + 240$$
$$\Rightarrow |AB|^2 = 784$$
$$\Rightarrow |AB| = 28 \text{ metre olur.}$$

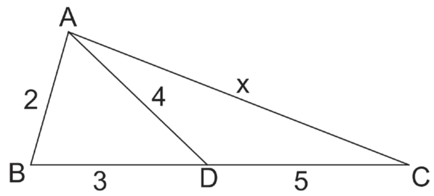
ALIŞTIRMALAR

1.



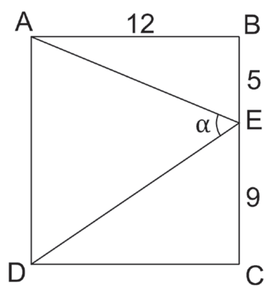
Şekildeki ABC üçgeninde $m(\widehat{CAB}) = 135°$; $|AB| = 2\sqrt{2}$ cm, $|AC| = 4$ cm olarak veriliyor. Buna göre $|BC|$'nun kaç cm olduğunu bulunuz.

2.



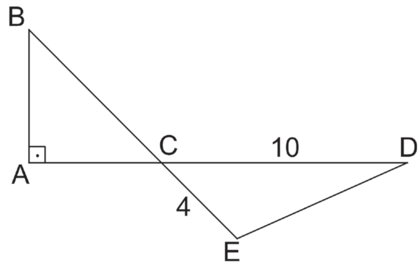
Şekildeki ABC üçgeninde B, D ve C noktaları doğrusal, $|AB| = 2$ cm, $|BD| = 3$ cm, $|AD| = 4$ cm, $|DC| = 5$ cm ve $|AC| = x$ cm olduğuna göre x değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.

3.



Şekildeki ABCD dikdörtgeninde B, E ve C noktaları doğrusal, $|AB| = 12$ cm, $|BE| = 5$ cm, $|EC| = 9$ cm ve $m(\widehat{AED}) = \alpha$ olarak verilmiştir. Buna göre $\cos\alpha$ değerini bulunuz.

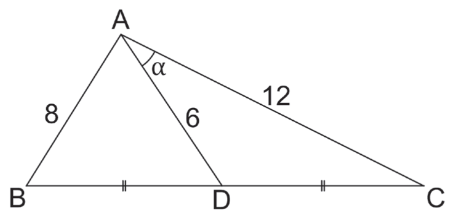
4.



Yukarıdaki şekilde A, C ve D noktaları doğrusal, $[BE] \cap [AD] = \{C\}$, $[BA] \perp [AD]$, $|CD| = 10$ cm, $|CE| = 4$ cm ve $\tan(\widehat{ABC}) = 0{,}75$ olarak veriliyor. Buna göre $|DE|$'nun kaç cm olduğunu bulunuz.

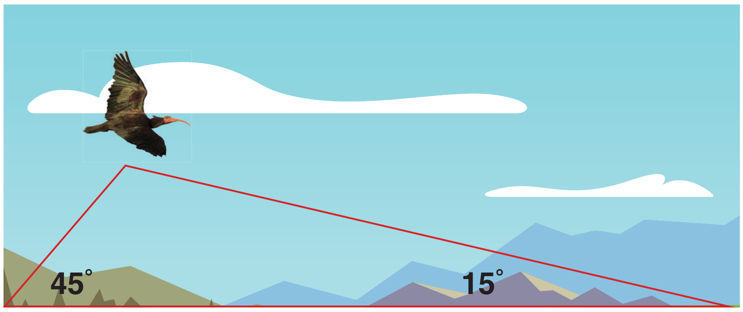
5. Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları $|BC| = a$ cm, $|AC| = b$ cm ve $|AB| = c$ cm'dir.
Üçgenin kenar uzunlukları arasında $a^2 = b^2 + c^2 + b \cdot c$ bağıntısı olduğuna göre $m(\widehat{BAC})$'nün kaç derece olduğunu bulunuz.

6.



Şekildeki ABC üçgeninde B, D ve C noktaları doğrusal, $|AB| = 8$ cm, $|AD| = 6$ cm, $|AC| = 12$ cm, $|BD| = |DC|$ ve $m(\widehat{DAC}) = \alpha$ olarak verildiğine göre $\cos\alpha$ değerini bulunuz.

11.1.2.3. Sinüs Teoremi

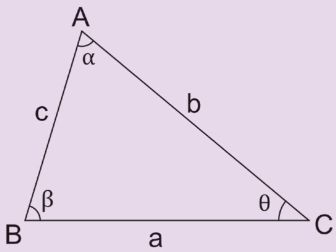


(Halfeti) (Bozova)

Her canlı ekosistemin bir parçasıdır. Bir canlı türünün yok olması bu sistemin zarar görmesine neden olur. Bilindiği gibi kelaynak kuşlarının nesli tükenmektedir. Türkiye'de, kelaynak kuşları yoğun olarak Şanlıurfa ilinde yaşamaktadır.

Halfeti ilçesi ile Bozova ilçesi arası yaklaşık 58 kilometredir. Halfeti'den Bozova'ya doğru uçan bir kelaynak kuşunun konumu yukarıdaki görselde verilmiştir. Verilen bu bilgilere göre kelaynak kuşunun bu konumda Bozova ilçesine olan uzaklığının kaç km olduğunu nasıl bulabilirsiniz?

Buluyorum



Yukarıdaki ABC üçgeninde $m(\widehat{A}) = \alpha$, $m(\widehat{B}) = \beta$ ve $m(\widehat{C}) = \theta$ olmak üzere

$A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\theta$ ise
$b \cdot c \cdot \sin\alpha = a \cdot c \cdot \sin\beta = a \cdot b \cdot \sin\theta$ olur.

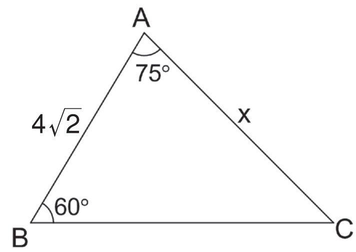
$b \cdot c \cdot \sin\alpha = a \cdot c \cdot \sin\beta$ ise $b \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\beta$ olup orantı özelliği kullanılarak $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ olur. ...(I)

$a \cdot c \cdot \sin\beta = a \cdot b \cdot \sin\theta$ ise $c \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\theta$ olup orantı özelliği kullanılarak $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\theta}$ olur. ...(II)

(I) ve (II) numaralı eşitliklerden

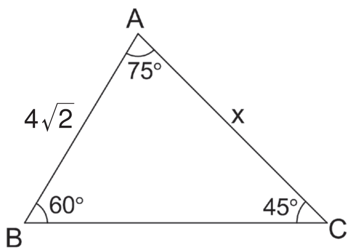
$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\theta}$ olarak yazılır. Bir üçgenin kenar uzunlukları ve bu kenarları gören açıların sinüsleri arasındaki bu bağıntıya **sinüs teoremi** adı verilir.

Örnek 48



Şekildeki ABC üçgeninde $|AB| = 4\sqrt{2}$ cm, $m(\widehat{BAC}) = 75^\circ$ ve $m(\widehat{ABC}) = 60^\circ$ olarak verilmiştir. Buna göre $|AC| = x$ değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.

Çözüm



Bir üçgenin iç açılarının ölçülerinin toplamı 180° olduğundan

$75^\circ + 60^\circ + m(\widehat{ACB}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{ACB}) = 45^\circ$ olur.

ABC üçgeninde sinüs teoremi uygulanırsa

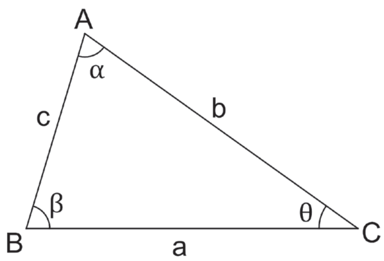
$$\frac{x}{\sin 60^\circ} = \frac{4\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$$

$$\frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\cancel{\sqrt{2}}}{\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2}}$$

$$\frac{2x}{\sqrt{3}} = 8$$

$2x = 8\sqrt{3} \Rightarrow x = 4\sqrt{3}$ cm olarak bulunur.

Örnek 49



Şekildeki ABC üçgeninde $m(\widehat{A}) = \alpha$, $m(\widehat{B}) = \beta$ ve $m(\widehat{C}) = \theta$ olmak üzere $\frac{a}{\sin\alpha} = 4$ ve ABC üçgeninin çevresi 3 cm olarak veriliyor.

$\sin\alpha + \sin\beta = \frac{1}{2}$ olduğuna göre $\sin\theta$ değerini bulunuz.

Çözüm

ABC üçgeninde sinüs teoremi uygulanırsa

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\theta} = 4$ olur. Orantı özelliği kullanılarak

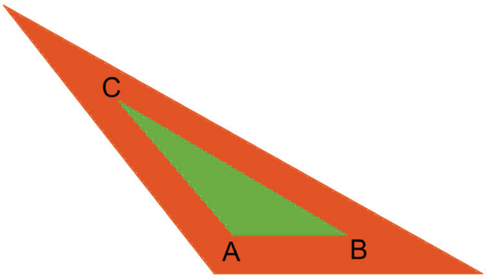
$$\frac{\overbrace{a+b+c}^{3}}{\underbrace{\sin\alpha + \sin\beta}_{\frac{1}{2}} + \sin\theta} = 4$$

$$\frac{3}{\sin\theta + \frac{1}{2}} = 4$$

$$4\sin\theta + 2 = 3$$

$4\sin\theta = 1 \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{4}$ olarak bulunur.

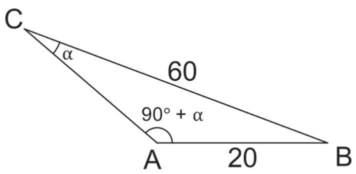
Örnek 50



Yandaki şekilde verilen koşu yolunun içinde ABC üçgeni şeklinde yeşil alan bulunmaktadır. Bu ABC üçgeni ile ilgili $m(\widehat{A}) = 90^\circ + m(\widehat{C})$, $|CB| = 60$ m ve $|AB| = 20$ m olarak verilmiştir. Buna göre $\sin(\widehat{ACB})$ değerini bulunuz.

Çözüm

$m(\widehat{C}) = \alpha$ denirse $m(\widehat{A}) = 90^\circ + \alpha$ olur. ABC üçgeninde sinüs teoremi uygulanırsa



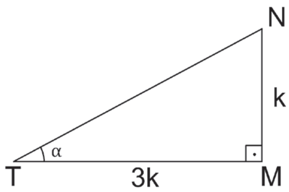
$$\frac{20}{\sin\alpha} = \frac{60}{\sin(90^\circ + \alpha)}$$

$$\frac{20}{\sin\alpha} = \frac{60}{\cos\alpha}$$

$$3\sin\alpha = \cos\alpha$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{3} \text{ ve } \tan\alpha = \frac{1}{3} \text{ olur.}$$

$\tan\alpha$ değeri biliniyorsa $\sin\alpha$ değerini bulmak için dik kenarlarının oranı $\frac{1}{3}$ olan bir dik üçgen aşağıdaki gibi çizilir.



Çizilen NMT dik üçgeninde Pisagor teoremi kullanılırsa

$$|NT|^2 = k^2 + 9k^2$$

$$|NT|^2 = 10k^2$$

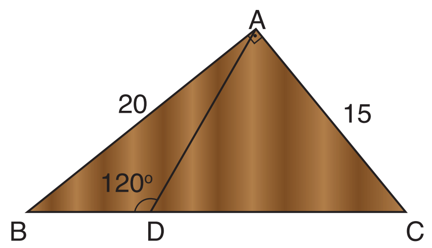
$$|NT| = \sqrt{10}\,k \text{ olur.}$$

Buradan $\sin\alpha = \dfrac{k}{\sqrt{10}\,k} = \dfrac{1}{\underset{(\sqrt{10})}{\sqrt{10}}} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$ olarak bulunur.

Sıra Sizde

Bir ABC üçgeninde $m(\widehat{A}) = 90^\circ + m(\widehat{C})$, $|CB| = 5$ cm ve $|AB| = 3$ cm olarak verilmiştir. Buna göre $\cot(\widehat{ACB})$ değerini bulunuz.

Örnek 51

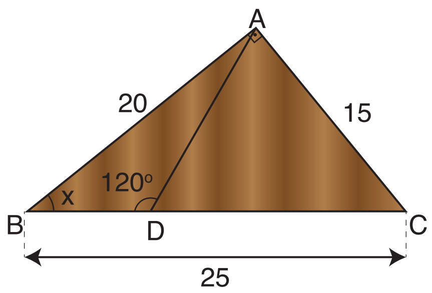


Feride Hanım, şekilde verilen ABC dik üçgeni şeklindeki arazisini $m(\widehat{ADB}) = 120^\circ$ olacak şekilde $[AD]$ boyunca zemine paralel olacak şekilde tek sıra tel çekerek iki parçaya ayıracaktır. Arazide $D \in [BC]$, $[AB] \perp [AC]$, $|AB| = 20$ metre ve $|AC| = 15$ metredir.

Buna göre doğrusal bir şekilde çekilecek olan telin uzunluğunun kaç metre olacağını bulunuz.

Çözüm

ABC üçgeni içinde Pisagor teoremi uygulanırsa
$|BC|^2 = 20^2 + 15^2 \Rightarrow |BC|^2 = 400 + 225 \Rightarrow |BC|^2 = 625 \Rightarrow |BC| = 25$ metre olur.



ABC açısının ölçüsüne x denirse $\sin x = \dfrac{15}{25} = \dfrac{3}{5}$ olur. ABD üçgeninde sinüs teoremi uygulanırsa

$$\frac{|AD|}{\sin x} = \frac{20}{\sin 120^\circ} \Rightarrow \frac{|AD|}{\frac{3}{5}} = \frac{20}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

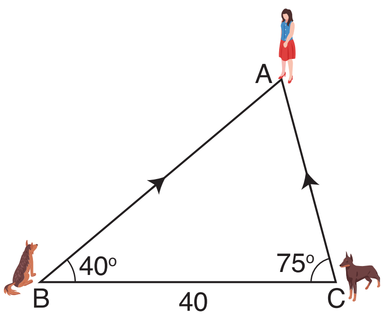
$$\Rightarrow |AD| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 20 \cdot \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{|AD| \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{60}{5}$$

$$\Rightarrow |AD| \cdot 5\sqrt{3} = 120$$

$$\Rightarrow |AD| = \frac{120}{5\sqrt{3}} = \frac{24}{\sqrt{3}} = \frac{24\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3} \text{ metre olur.}$$

Örnek 52



A noktasında bulunan Aylin, B noktasındaki Kaptan ve C noktasındaki Susam isimli köpeklerini yanına çağırmıştır. Köpekler arasındaki uzaklık $|BC| = 40$ metre olup aynı anda hareket eden köpekler doğrusal yollar izleyerek Aylin'in yanına gelmişlerdir.

$m(\widehat{ABC}) = 40^\circ$ ve $m(ACB) = 75^\circ$ olduğuna ve köpekler düzlemsel bir zeminde hareket ettiklerine göre Kaptan'ın Susam'dan yaklaşık kaç metre fazla yol almış olduğunu bulunuz.
$(\sin 40^\circ = 0{,}64,\ \sin 65^\circ = 0{,}9$ ve $\sin 75^\circ = 0{,}97)$

Çözüm

ABC üçgeni için sinüs teoremi uygulanırsa

$$\frac{|AC|}{\sin 40^\circ} = \frac{40}{\sin 65^\circ} = \frac{|AB|}{\sin 75^\circ}$$

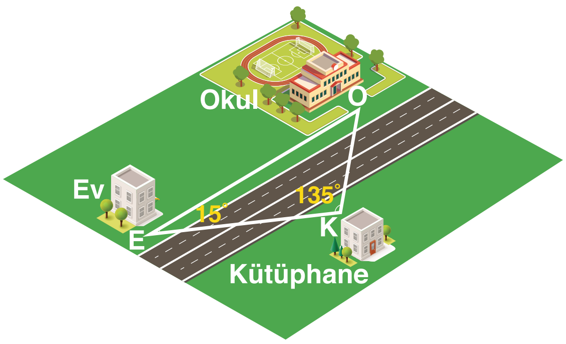
$$\frac{|AC|}{\sin 40^\circ} = \frac{40}{\sin 65^\circ} \Rightarrow \frac{|AC|}{0{,}64} = \frac{40}{0{,}9} \Rightarrow 0{,}9 \cdot |AC| = 25{,}6 \Rightarrow |AC| \approx 28{,}4\,\text{m}$$

$$\frac{40}{\sin 65^\circ} = \frac{|AB|}{\sin 75^\circ} \Rightarrow \frac{40}{0{,}9} = \frac{|AB|}{0{,}97} \Rightarrow 0{,}9 \cdot |AB| = 38{,}8 \Rightarrow |AB| \approx 43{,}1\,\text{m}$$

Buradan Kaptan, Susam'dan yaklaşık $43{,}1 - 28{,}4 = 14{,}7$ metre fazla yol almış olur.

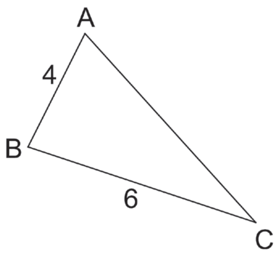
ALIŞTIRMALAR

1.



Selim'in evi, okulu ve düzenli gittiği semt kütüphanesinin kuş bakışı görünümü yukarıdaki görselde verilmektedir.
$m(\widehat{OEK}) = 15^\circ$ ve $m(\widehat{EKO}) = 135^\circ$ dir. Selim'in evi ile semt kütüphanesinin arasındaki mesafe 300 metre olduğuna göre evi ile okulu arasındaki mesafenin kaç metre olduğunu bulunuz.

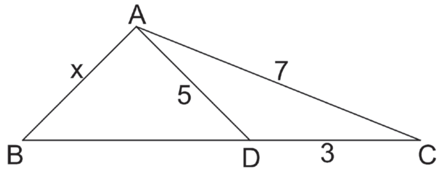
2.



Şekildeki ABC üçgeninde
$|AB| = 4$ cm, $|BC| = 6$ cm ve $\sin(\widehat{ACB}) = 0,2$
olduğuna göre $\sin(\widehat{BAC})$ değerini bulunuz.

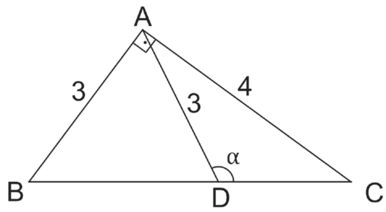
3. Bir DEF üçgeninde $m(\widehat{EDF}) = \alpha$,
$m(\widehat{DEF}) = \beta$, $m(\widehat{EFD}) = \theta$ ve
$\sin^2(\alpha) + \sin^2(\beta) = \sin^2(\theta)$ olduğuna göre θ açısının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.

4.



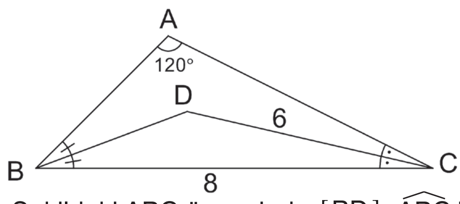
Şekilde ABC üçgeninde B, D ve C noktaları doğrusaldır. $|AD| = 5$ cm, $|DC| = 3$ cm, $|AC| = 7$ cm ve $\sin(\widehat{ABD}) = \frac{\sqrt{3}}{6}$ olduğuna göre $|AB| = x$ değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.

5.



Yukarıdaki şekilde B, D ve C noktaları doğrusal, BAC dik üçgendir. $[BA] \perp [CA]$;
$|AB| = 3$ cm, $|AC| = 4$ cm, $|AD| = 3$ cm ve $m(\widehat{ADC}) = \alpha$ olduğuna göre $\sin\alpha$ değerini bulunuz.

6.



Şekildeki ABC üçgeninde $[BD]$, $\widehat{ABC}$'nın ve $[CD]$, $\widehat{ACB}$'nın açıortayıdır.
$|DC| = 6$ cm, $|BC| = 8$ cm; $m(\widehat{BAC}) = 120^\circ$ ve $m(\widehat{DBC}) = \alpha$ olduğuna göre $\sin\alpha$ değerini bulunuz.

11.1.2.4. Trigonometrik Fonksiyonların Grafikleri

Periyodik Fonksiyon

Bilgi

$A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall x \in A$ için $f(x+T)=f(x)$ eşitliğini sağlayan en az bir $T \neq 0$ gerçek sayısı varsa f fonksiyonuna **periyodik fonksiyon**, T gerçek sayısına da f fonksiyonunun bir **periyodu** denir. Bu eşitliği sağlayan T sayılarından pozitif olanlarının en küçüğüne **f fonksiyonunun esas periyodu** denir. Kitapta bundan sonra bir fonksiyonun periyodu denildiğinde o fonksiyonun esas periyodu anlaşılacaktır.

$k \in \mathbb{Z}$ için $\sin x = \sin(x + k \cdot 2\pi)$ ve $\cos x = \cos(x + k \cdot 2\pi)$ olduğundan $k = 1$ için $k \cdot 2\pi = 1 \cdot 2\pi = 2\pi$ değeri $f(x) = \sin x$ ve $g(x) = \cos x$ fonksiyonlarının periyodudur.

$k \in \mathbb{Z}$ için $\tan x = \tan(x + k \cdot \pi)$ ve $\cot x = \cot(x + k \cdot \pi)$ olduğundan $k = 1$ için $k \cdot \pi = 1 \cdot \pi = \pi$ değeri $f(x) = \tan x$ ve $g(x) = \cot x$ fonksiyonlarının periyodudur.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
sinx	0	1	0	−1	0	1	0	−1	0

2π 2π

Yukarıdaki tabloda $[0, 2\pi]$ aralığındaki sinx değerlerinin $[2\pi, 4\pi]$ aralığında da tekrar ettiği görülmektedir.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
cosx	1	0	−1	0	1	0	−1	0	1

2π 2π

Yukarıdaki tabloda $[0, 2\pi]$ aralığındaki cosx değerlerinin $[2\pi, 4\pi]$ aralığında da tekrar ettiği görülmektedir.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
tanx	0	1	tanımsız	−1	0	1	tanımsız	−1	0

π π

Yukarıdaki tabloda $[0, \pi]$ aralığındaki tanx değerlerinin $[\pi, 2\pi]$ aralığında da tekrar ettiği görülmektedir.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
cotx	tanımsız	1	0	−1	tanımsız	1	0	−1	tanımsız

π π

Yukarıdaki tabloda $[0, \pi]$ aralığındaki cotx değerlerinin $[\pi, 2\pi]$ aralığında da tekrar ettiği görülmektedir.

Bilgi

$a \neq 0,\ k \neq 0$ ve $k,\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ olmak üzere periyot T ile gösterilirse

- $f(x) = k \cdot \sin(ax + b) + c$ fonksiyonu için $T = \dfrac{2\pi}{|a|}$ olur.
- $g(x) = k \cdot \cos(ax + b) + c$ fonksiyonu için $T = \dfrac{2\pi}{|a|}$ olur.

Örnek 53

$f(x) = \sin(5x - 3)$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun periyodunu bulunuz.

Çözüm

$f(x) = \sin(\underset{\substack{\downarrow \\ a = 5}}{5}x - 3)$ kuralı ile verilen f fonksiyonunda periyot $T = \dfrac{2\pi}{|a|} = \dfrac{2\pi}{|5|} = \dfrac{2\pi}{5}$ olur.

Örnek 54

$g(x) = 4 \cdot \cos(-2x + 3) - 7$ kuralı ile verilen g fonksiyonunun periyodunu bulunuz.

Çözüm

$g(x) = 4 \cdot \cos(\underset{\substack{\downarrow \\ a = -2}}{-2}x + 3) - 7$ kuralı ile verilen g fonksiyonunda periyot $T = \dfrac{2\pi}{|-2|} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$ olur.

Sıra Sizde

$h(x) = -2002 \cdot \sin(6 - 3x) + 2003$ kuralı ile verilen h fonksiyonunun periyodunu bulunuz.

Bilgi

$a \neq 0,\ k \neq 0$, ve $k, a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere periyot T ile gösterilirse

- $f(x) = k \cdot \tan(ax + b) + c$ veya $g(x) = k \cdot \cot(ax + b) + c$ fonksiyonları için $T = \frac{\pi}{|a|}$ olur.

Örnek 55

$f(x) = \tan(3x + 2) - 8$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun periyodunu bulunuz.

Çözüm

$f(x) = \tan(\underset{\substack{\downarrow \\ a = 3}}{3}x + 2) - 8$ kuralı ile verilen f fonksiyonunda periyot $T = \frac{\pi}{|3|} = \frac{\pi}{3}$ olur.

Örnek 56

$g(x) = \frac{5}{2} \cdot \cot(3 - 7x) + 1$ kuralı ile verilen g fonksiyonunun periyodunu bulunuz.

Çözüm

$g(x) = \frac{5}{2} \cdot \cot(3 \underset{\substack{\downarrow \\ a = -7}}{-7}x) + 1$ kuralı ile verilen g fonksiyonunda periyot $T = \frac{\pi}{|-7|} = \frac{\pi}{7}$ olur.

Sıra Sizde

$a \neq 0,\ b \neq 0,\ a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $h(x) = a \cdot \tan(bx - 5) + 15$ kuralı ile verilen h fonksiyonunun periyodu $\frac{\pi}{4}$ olduğuna göre b'nin alabileceği değerler çarpımını bulunuz.

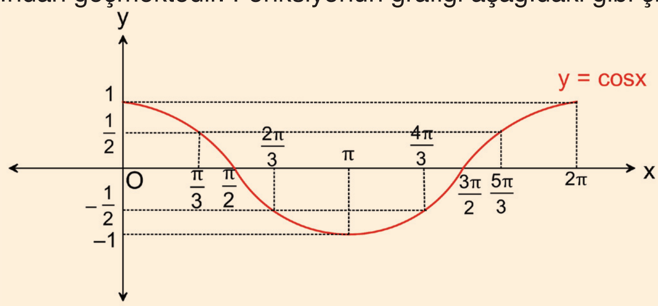
İpucu

Kosinüs Fonksiyonunun Grafiği

Kosinüs fonksiyonunun grafiği $\{(x,\ \cos x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ kümesine analitik düzlemde karşılık gelen noktalar kümesidir. $f: \mathbb{R} \to [-1,\ 1]$, $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun periyodu 2π olduğundan $[0,\ 2\pi]$ aralığındaki $0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{2\pi}{3},\ \pi,\ \frac{4\pi}{3},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{3},\ 2\pi$ değerleri seçilip bu değerlerin kosinüsleri aşağıda verilen tablodaki gibi gösterilir.

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
cosx	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1

Tabloya göre kosinüs fonksiyonunun grafiği;
$(0,\ 1),\ \left(\frac{\pi}{3},\ \frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{\pi}{2},\ 0\right),\ \left(\frac{2\pi}{3},\ -\frac{1}{2}\right),\ (\pi,\ -1),\ \left(\frac{4\pi}{3},\ -\frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{3\pi}{2},\ 0\right),\ \left(\frac{5\pi}{3},\ \frac{1}{2}\right)$ ve $(2\pi,\ 1)$ noktalarından geçmektedir. Fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibi çizilir.

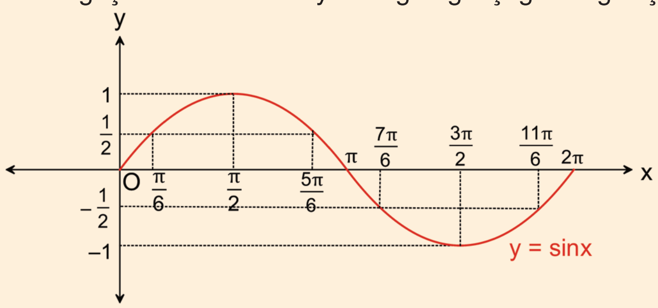


Sinüs Fonksiyonunun Grafiği

Sinüs fonksiyonunun grafiği $\{(x,\ \sin x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ kümesine analitik düzlemde karşılık gelen noktalar kümesidir. $f: \mathbb{R} \to [-1,\ 1]$, $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun periyodu 2π olduğundan $[0,\ 2\pi]$ aralığındaki $0,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5\pi}{6},\ \pi,\ \frac{7\pi}{6},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{11\pi}{6},\ 2\pi$ değerleri seçilip bu değerlerin kosinüsleri aşağıda verilen tablodaki gibi gösterilir.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sinx	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0

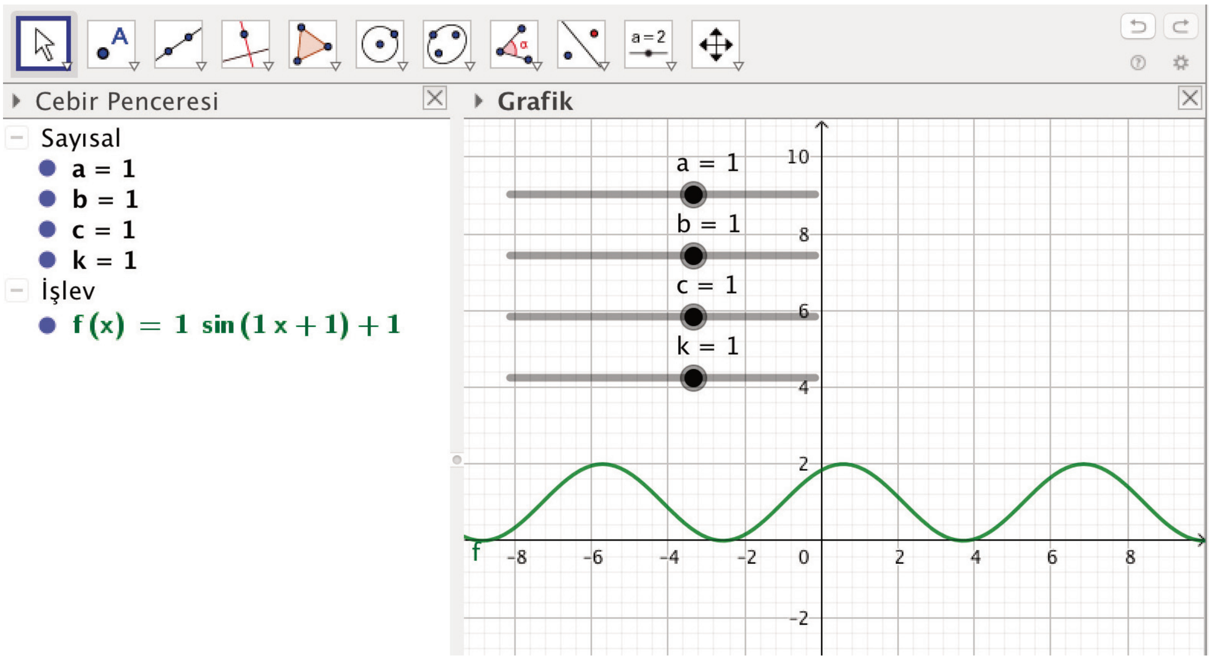
Tabloya göre sinüs fonksiyonunun grafiği;
$(0,\ 0),\ \left(\frac{\pi}{6},\ \frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{\pi}{2},\ 1\right),\ \left(\frac{5\pi}{6},\ \frac{1}{2}\right),\ (\pi,\ 0),\ \left(\frac{7\pi}{6},\ -\frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{3\pi}{2},\ -1\right),\ \left(\frac{11\pi}{6},\ -\frac{1}{2}\right)$ ve $(2\pi,\ 0)$ noktalarından geçmektedir. Fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibi çizilir.



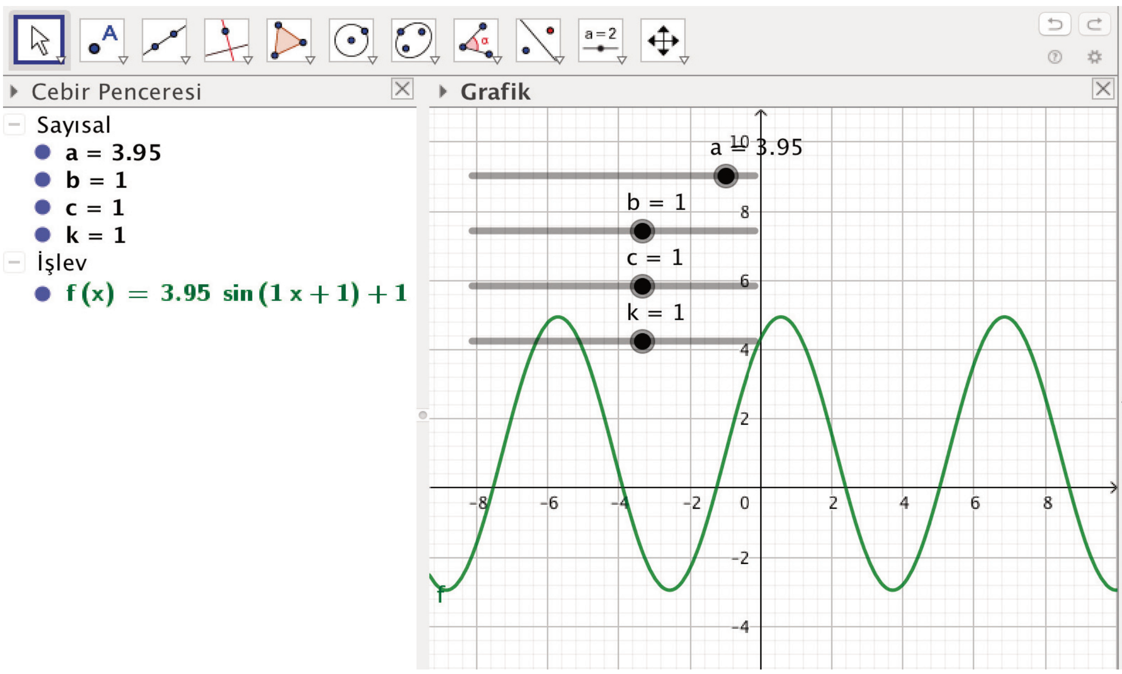
$f(x) = a \cdot \sin(bx + c) + k$ Türündeki Fonksiyonların Grafikleri ve Katsayıların Grafik Üzerindeki Etkileri

$a \neq 0$, $b \neq 0$ ve $a, b, c, k \in \mathbb{R}$ olmak üzere a, b, c, k katsayılarının $f(x) = a \cdot \sin(bx + c) + k$ türündeki fonksiyonların grafiği üzerindeki etkisi dinamik matematik yazılımı kullanılarak aşağıdaki gibi gözlemlenebilir.

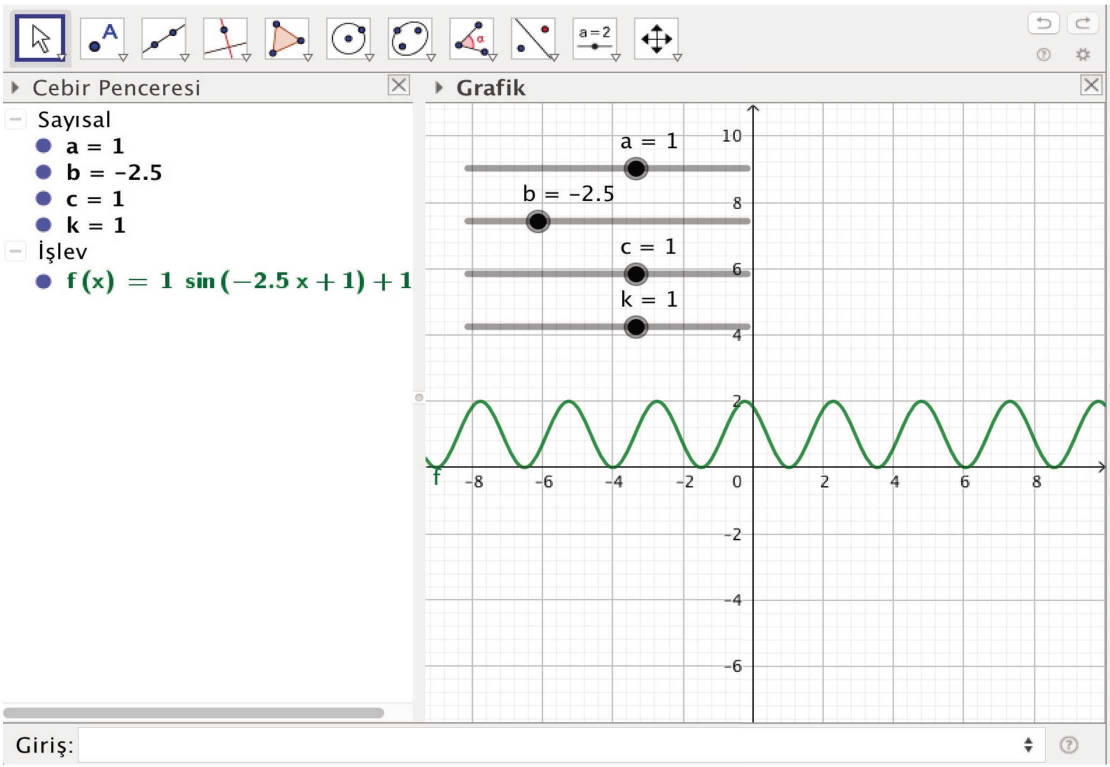
Dinamik matematik yazılımını açınız. Alttaki giriş bölümüne $a \cdot \sin(bx + c) + k$ yazınız ve "ENTER" tuşuna basınız. Ekranda beliren kutuda "Sürgüler Oluştursun mu?" butonuna basınız. Böylece ekranda sürgülerin değeri 1 olarak $f(x) = 1 \cdot \sin(1 \cdot x + 1) + 1$ grafiği ekrana gelecektir.



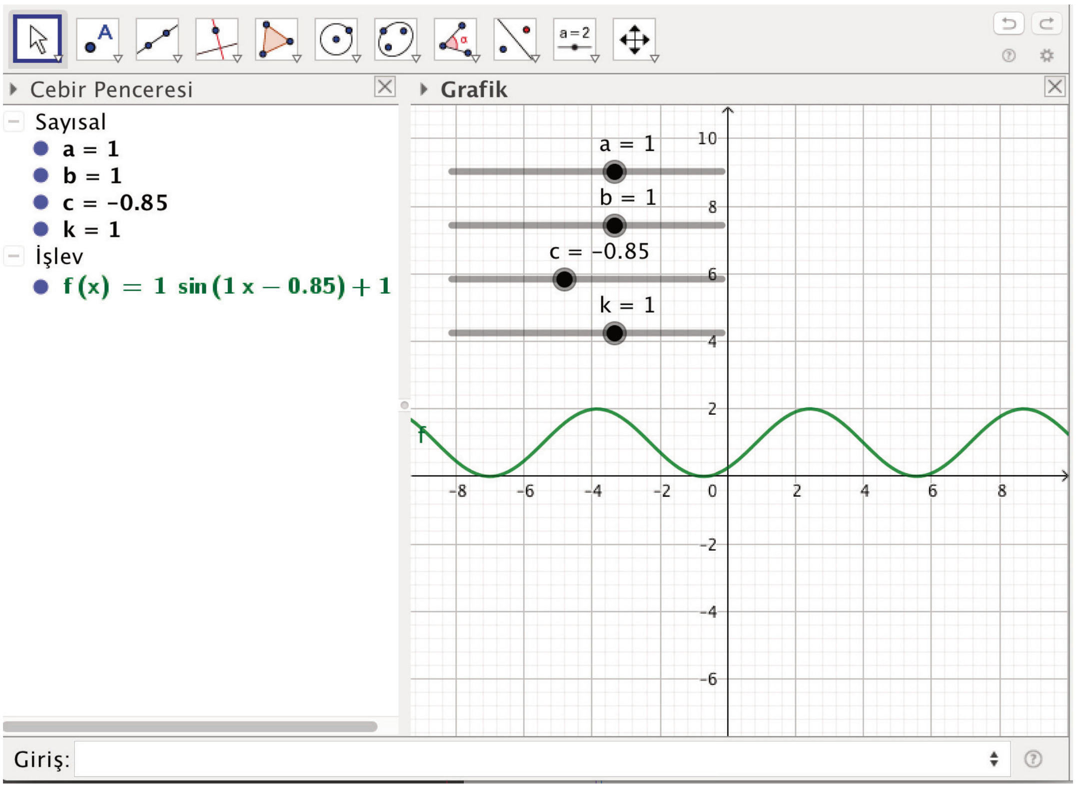
a sürgüsünü sağa sola oynatıp bu sırada grafikteki değişimi inceleyiniz. a değeri mutlak değerce arttığında grafiğin y ekseni boyunca açıldığını göreceksiniz. Aşağıdaki şekilde $a = 3{,}95$ değeri için $f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



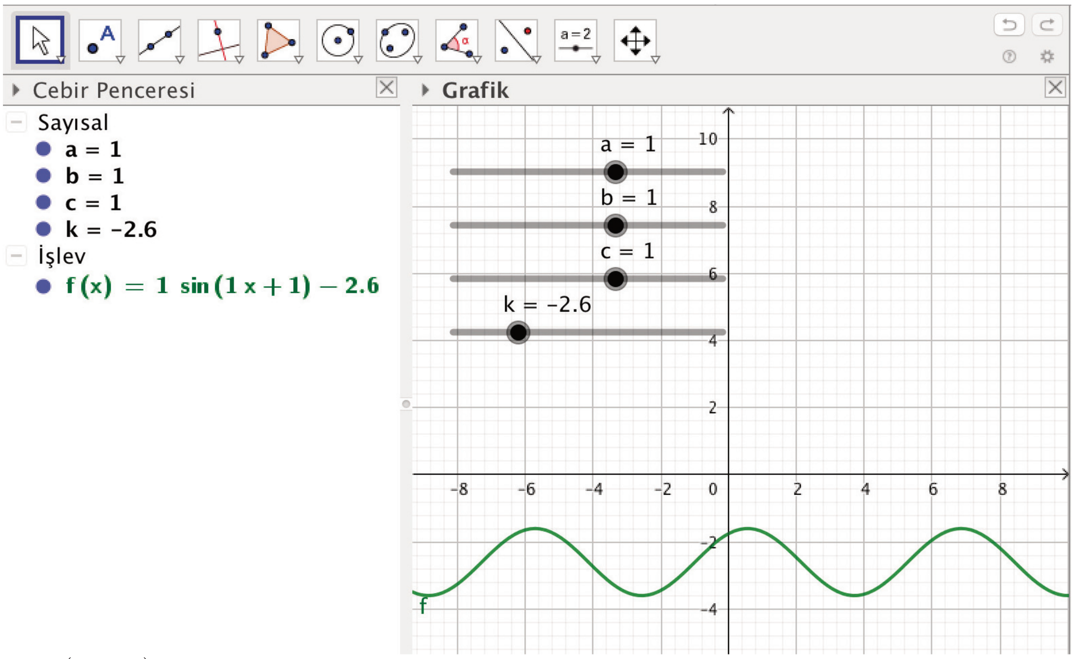
b sürgüsünü sağa sola oynatıp bu sırada grafikteki değişimi inceleyiniz. b değeri mutlak değerce arttığında grafiğin x ekseni boyunca sıkıştırıldığını göreceksiniz.



c sürgüsünü sağa sola oynatıp bu sırada grafikteki değişimi inceleyiniz. c değeri arttıkça grafiğin x ekseni boyunca sola doğru ötelendiğini, c değeri azaldıkça grafiğin x ekseni boyunca sağa doğru ötelendiğini göreceksiniz.



k sürgüsünü sağa sola oynatıp bu sırada grafikteki değişimi inceleyiniz. k değeri arttıkça grafiğin y ekseni boyunca yukarı doğru ötelendiğini, k değeri azaldıkça grafiğin y ekseni boyunca aşağı doğru ötelendiğini göreceksiniz.



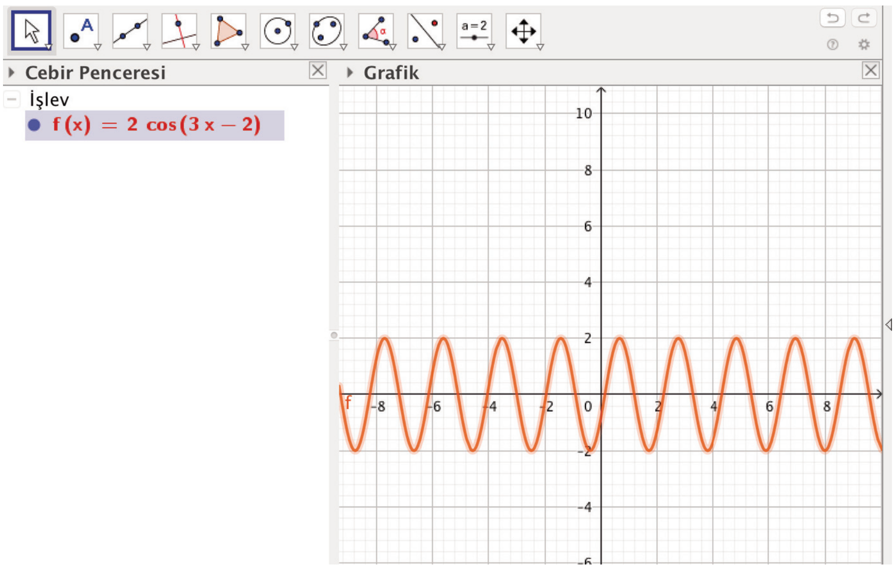
$f(x) = a \cdot \sin(bx + c) + k$ türündeki fonksiyonların grafiklerinde a, b, c ve k katsayılarının grafik üzerindeki etkileri görülmüştür.

Örnek 57

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2 \cdot \cos(3x - 2)$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun grafiğini dinamik matematik yazılımını kullanarak çiziniz.

Çözüm

Dinamik matematik yazılımını açınız. Giriş bölümüne $2 \cdot \cos(3x - 2)$ yazınız ve "ENTER" tuşuna basınız. Ekranda $f(x) = 2 \cdot \cos(3x - 2)$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun grafiğinin çizilmiş olduğunu göreceksiniz.

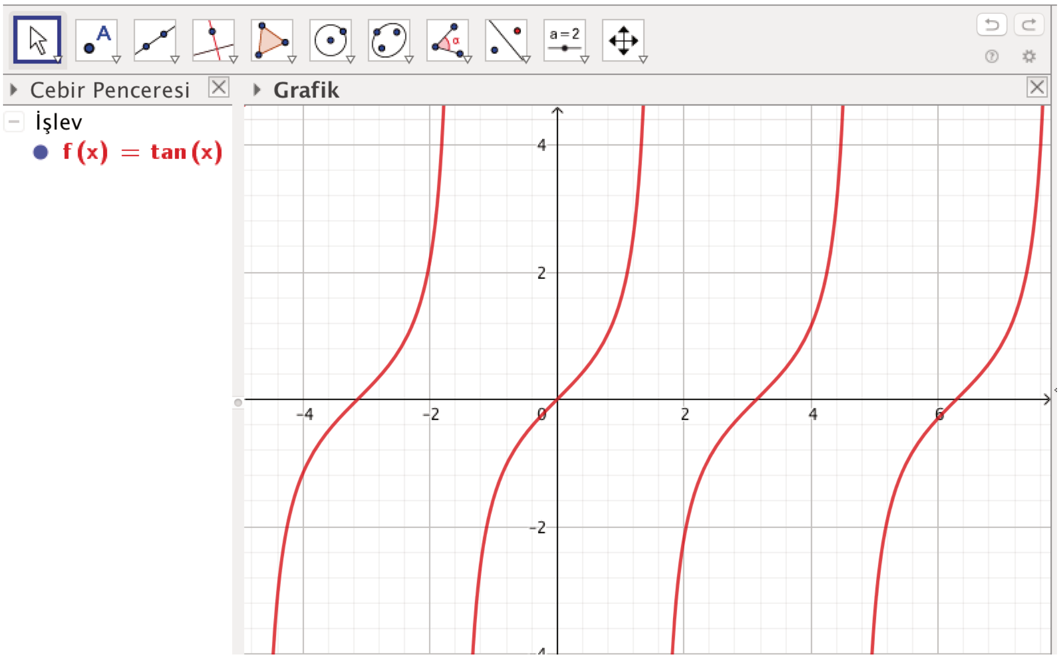


Örnek 58

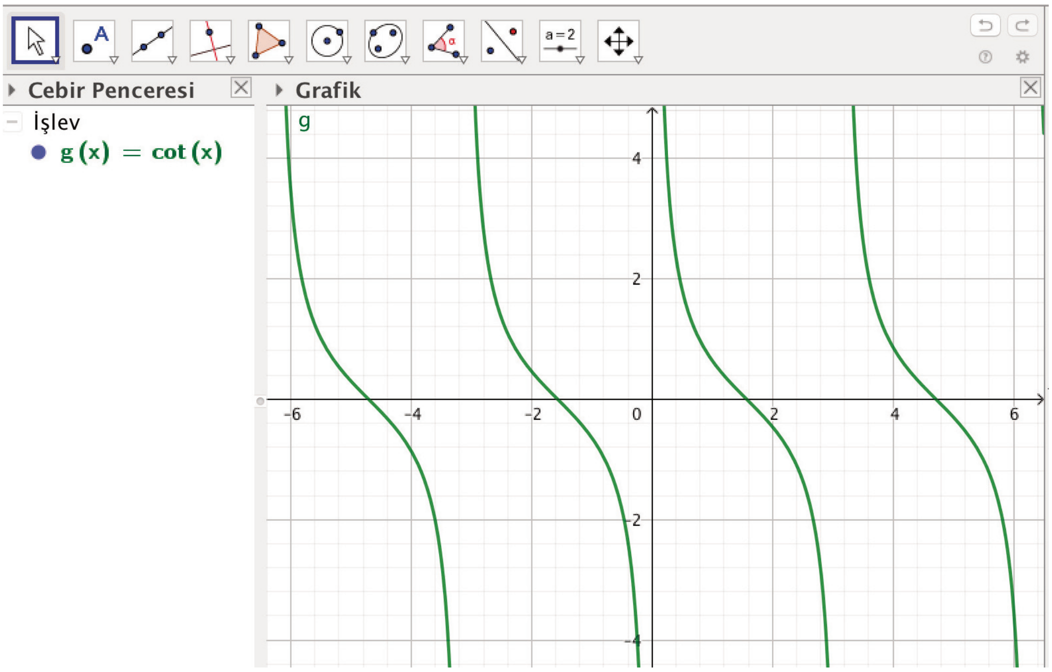
$f(x) = \tan x$ ve $g(x) = \cot x$ kuralları ile verilen f ve g fonksiyonlarının grafiklerini dinamik matematik yazılımını kullanarak çiziniz.

Çözüm

Dinamik matematik yazılımını açınız. Giriş bölümüne tanx yazınız ve "ENTER" tuşuna basınız. Ekranda $f(x) = \tan x$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun grafiğinin çizilmiş olduğunu göreceksiniz.



Dinamik matematik yazılımını açınız. Giriş bölümüne $g(x) = \cot x$ yazınız ve "ENTER" tuşuna basınız. Bu sayede ekranda $g(x) = \cot x$ kuralı ile verilen g fonksiyonunun grafiği belirecektir.

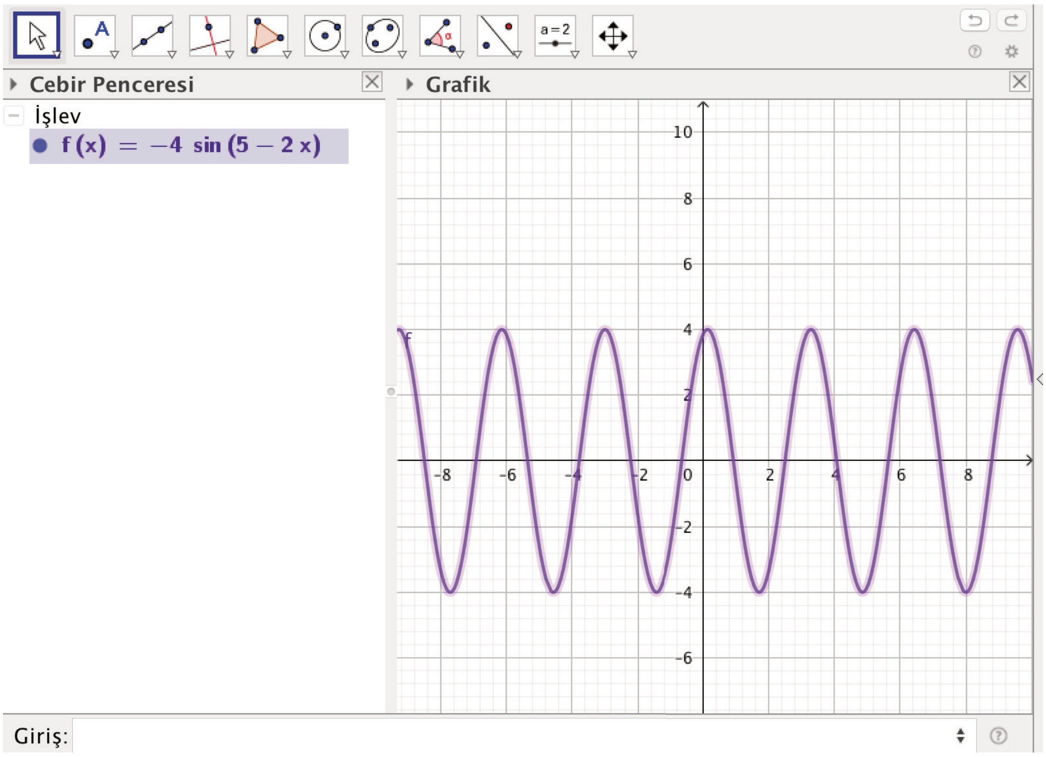


Örnek 59

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},\ f(x)=-4\cdot\sin(5-2x)$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun grafiğini dinamik matematik yazılımını kullanarak çiziniz.

Çözüm

Dinamik matematik yazılımını açınız. Giriş bölümüne $-4\cdot\sin(5-2x)$ yazınız ve "ENTER" tuşuna basınız. Ekranda $f(x)=-4\cdot\sin(5-2x)$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun grafiğinin çizilmiş olduğunu göreceksiniz.



Sıra Sizde

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},\ f(x)=7\cdot\sin(-x+3)$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun grafiğini dinamik matematik yazılımını kullanarak çiziniz.

Bilgi

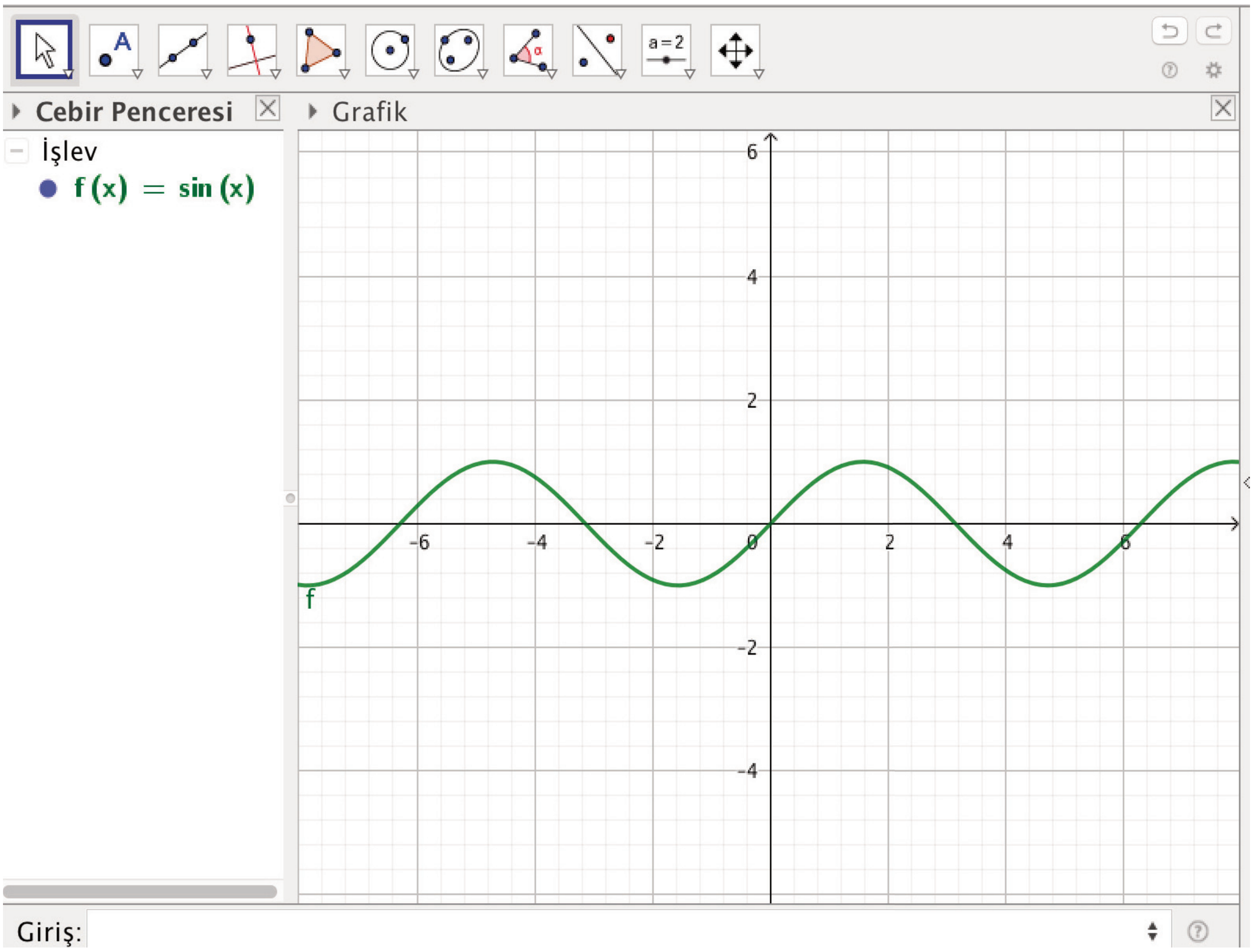
- Grafiği **orijine göre simetrik** olan fonksiyonlar **tek fonksiyondur.**
- Grafiği **y eksenine göre simetrik** olan fonksiyonlar **çift fonksiyondur.**

Örnek 60

$f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x$ kuralları ile verilen f ve g fonksiyonlarının grafikleri yardımıyla tek ya da çift fonksiyon olup olmadıklarını belirleyiniz.

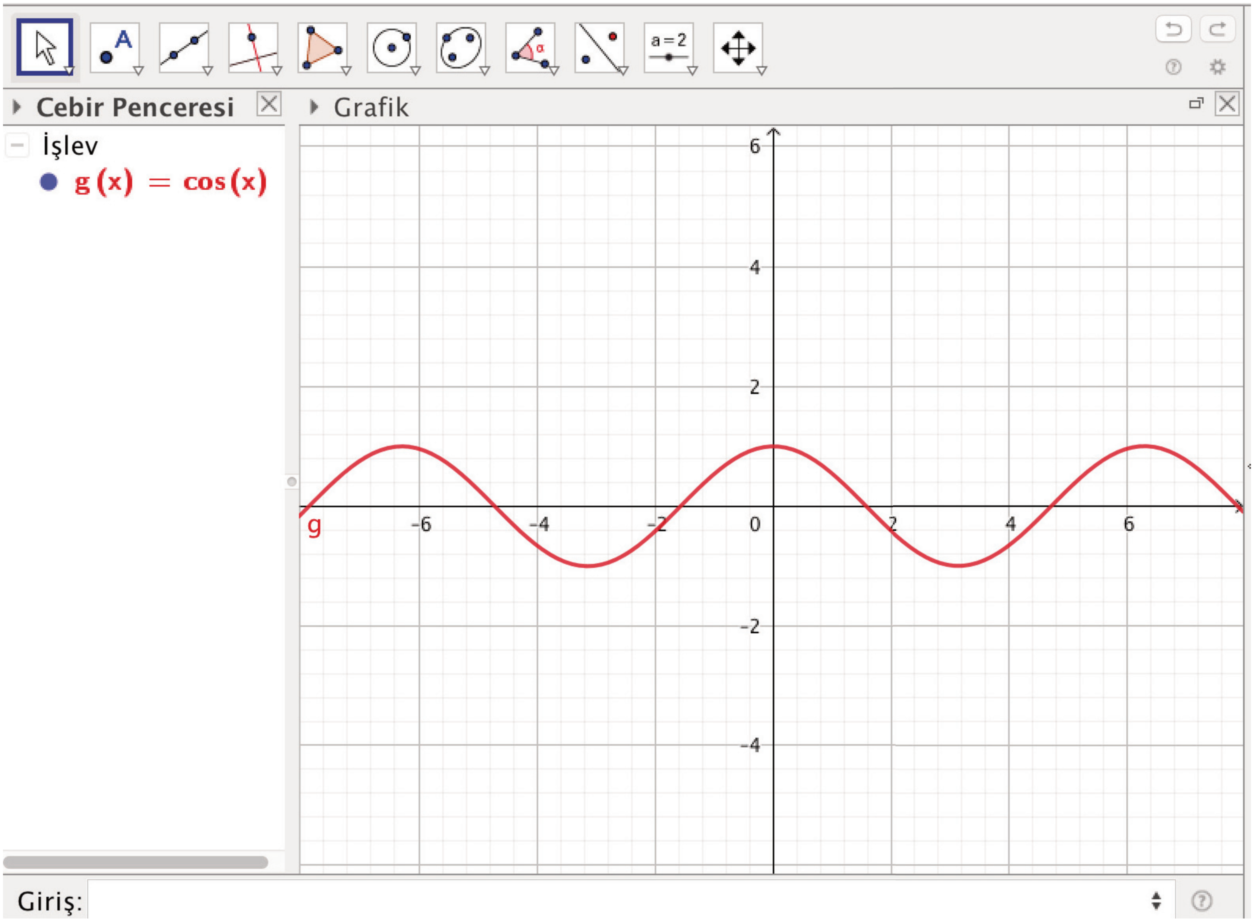
Çözüm

Dinamik matematik yazılımını açınız ve giriş bölümüne sinx yazarak “ENTER” tuşuna basınız. Ekranda $f(x) = \sin x$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun grafiğinin çizilmiş olduğunu göreceksiniz.



$f(x) = \sin x$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun grafiği orijine göre simetrik olduğundan bu fonksiyon tek fonksiyondur.

Dinamik matematik yazılımını açınız ve giriş bölümüne cosx yazarak "ENTER" tuşuna basınız. Bu durumda Grafik penceresinde $g(x) = \cos x$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibi görülür.



$g(x) = \cos x$ kuralı ile verilen g fonksiyonunun grafiği y eksenine göre simetrik olduğundan bu fonksiyon çift fonksiyondur.

Sıra Sizde

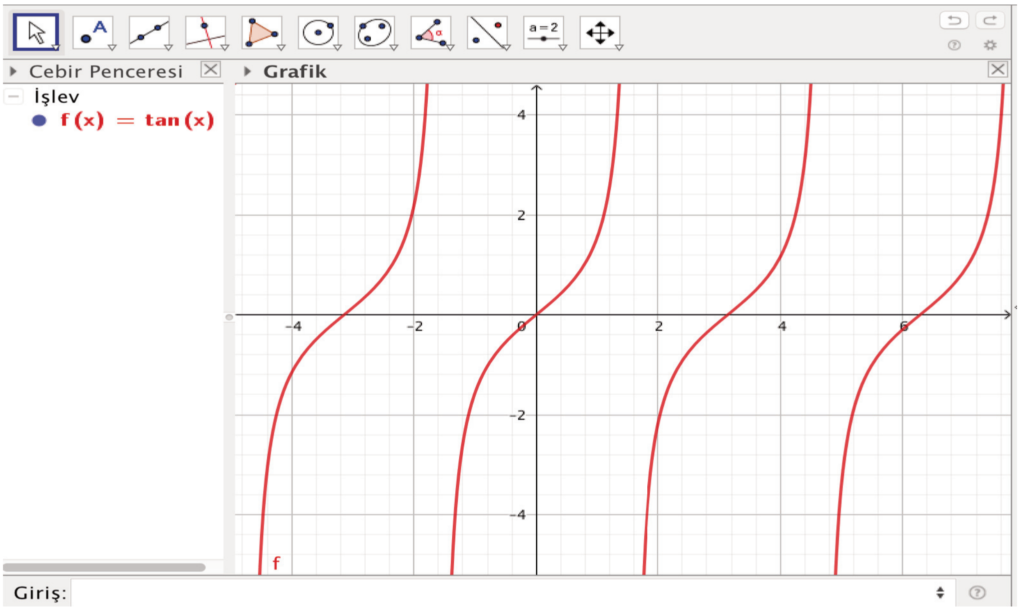
$y = 2 \cdot \sin x$ ve $y = -3 \cdot \cos x$ kuralları ile verilen fonksiyonların tek ya da çift fonksiyon olup olmadıklarını dinamik matematik yazılımını kullanarak gösteriniz.

Örnek 61

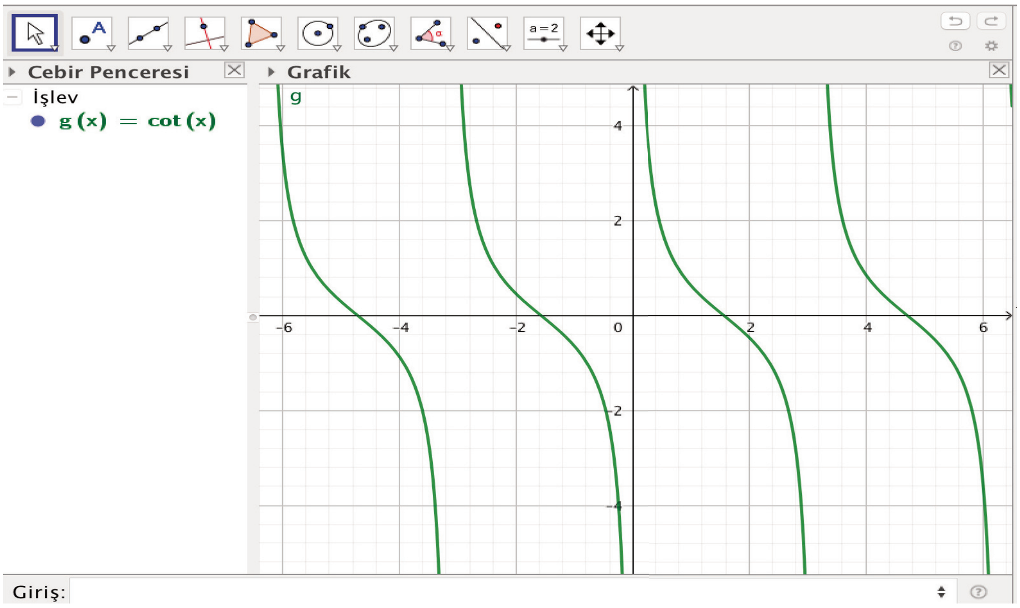
$f(x) = \tan x$ ve $g(x) = \cot x$ kuralları ile verilen f ve g fonksiyonlarının tek ya da çift fonksiyon olup olmadıklarını dinamik matematik yazılımı yardımıyla belirleyiniz.

Çözüm

Dinamik matematik yazılımını açınız. Giriş bölümüne tanx yazınız ve "ENTER" tuşuna basınız. Ekranda $f(x) = \tan x$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun grafiğinin çizilmiş olduğunu göreceksiniz.



$f(x) = \tan x$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun grafiği orijine göre simetrik olduğundan bu fonksiyon tek fonksiyondur. Dinamik matematik yazılımını açınız. Giriş bölümüne cotx yazınız ve "ENTER" tuşuna basınız. Bu sayede ekranda $g(x) = \cot x$ kuralı ile verilen g fonksiyonunun grafiği belirecektir.



$g(x) = \cot x$ kuralı ile verilen g fonksiyonunun grafiği orijine göre simetrik olduğundan bu fonksiyon tek fonksiyondur.

ALIŞTIRMALAR

1. $f(x) = \sin(-3x + 5)$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun periyodunu bulunuz.

2. $g(x) = 6 \cdot \cos(-7x + 1)$ kuralı ile verilen g fonksiyonunun periyodunu bulunuz.

3. $f(x) = 3 \cdot \tan(6x - 3) + 3$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun periyodunu bulunuz.

4. $h(x) = 2 \cdot \tan\left(4x - \frac{2}{5}\right) + 5$ kuralı ile verilen h fonksiyonunun periyodunu bulunuz.

5. $f(x) = -\cos\left(\frac{1}{8} - 4x\right) - 1$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun periyodunu bulunuz.

6. $f(x) = \sin x$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun grafiğinin $[2\pi, 4\pi]$ aralığında x eksenini kestiği noktaların apsisleri toplamını bulunuz.

7. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(-8x + 5)$ ve $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -\cos(4x - 9)$ kuralları ile verilen f ve g fonksiyonlarının grafiklerini dinamik matematik yazılımını kullanarak çiziniz. Tek fonksiyon ya da çift fonksiyon olup olmadıklarını belirtiniz.

8. $f(x) = \tan(-3x + 2)$ ve $g(x) = -\cot(2x - 1)$ kuralları ile verilen f ve g fonksiyonlarının grafiklerini Dinamik matematik yazılımında çiziniz. Tek fonksiyon ya da çift fonksiyon olup olmadıklarını belirtiniz.

11.1.2.5. Sinüs, Kosinüs ve Tanjant Fonksiyonlarının Ters Fonksiyonları

Bir fonksiyonun tersinin de bir fonksiyon olabilmesi için bu fonksiyonun bire bir ve örten olması gerekir. Trigonometrik fonksiyonlar $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye bire bir ve örten olmadıklarından bire bir ve örten oldukları gerçek sayı aralıkları seçilerek bu aralıklarda tersleri bulunur. Böylece bir trigonometrik fonksiyonun tersi de bir fonksiyon belirtmiş olur.

Bilgi

Sinüs Fonksiyonunun Ters Fonksiyonu

Sinüs fonksiyonunun bire bir ve örten olduğu aralıklardan biri $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığıdır. Bu aralıkta tanımlı $f:\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun tersi de bir fonksiyondur. $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun tersi $f^{-1}(x) = \arcsin x$ biçiminde gösterilir. $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun tanım kümesi $[-1,1]$, değer kümesi $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ olur. $y = \arcsin x \Longleftrightarrow x = \sin y$ olarak yazılabilir.

Örnek 62

$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

Çözüm

$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = x$ denilirse $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ olur.

$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ olduğundan $x = \frac{\pi}{4}$ bulunur.

Örnek 63

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ifadesinin eşitini bulunuz.

Çözüm

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = x$ denilirse $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ olur.

$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ olduğundan $x = -\frac{\pi}{3}$ bulunur.

Sıra Sizde

$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ifadesinin eşitini bulunuz.

Örnek 64

$\tan\left(\arcsin 1+\arcsin\frac{1}{2}\right)$ ifadesinin eşitini bulunuz.

Çözüm

$\arcsin 1 = x$ olsun. Buradan $\sin x = 1$ olur.

$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ olduğundan $x = \frac{\pi}{2}$ olur. ...(I)

$\arcsin\frac{1}{2} = y$ olsun. Buradan $\sin y = \frac{1}{2}$ olur.

$y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ olduğundan $y = \frac{\pi}{6}$ olur. ...(II)

(I) ve (II) numaralı ifadelerde bulunan açı değerleri $\tan(\underbrace{\arcsin 1}_{x}+\underbrace{\arcsin\frac{1}{2}}_{y})$ ifadesinde yerlerine yazılırsa

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = -\cot\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$ olarak bulunur.

Bilgi

Kosinüs Fonksiyonunun Ters Fonksiyonu

Kosinüs fonksiyonunun bire bir ve örten olduğu aralıklardan biri $[0, \pi]$ aralığıdır. Bu aralıkta tanımlı $f:[0, \pi]\to[-1, 1]$, $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun tersi de bir fonksiyondur. $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun tersi $f^{-1}(x) = \arccos x$ biçiminde gösterilir. $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun tanım kümesi $[-1,1]$, değer kümesi $[0,\pi]$ olur. $y = \arccos x \Longleftrightarrow x = \cos y$ olarak yazılabilir.

Örnek 65

$\arccos\frac{1}{2}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

Çözüm

$\arccos\frac{1}{2} = x$ olsun. Buradan $\cos x = \frac{1}{2}$ olur.

$x \in [0, \pi]$ olduğundan $x = \frac{\pi}{3}$ bulunur.

Örnek 66

$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ifadesinin eşitini bulunuz.

Çözüm

$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = x$ olsun. Buradan $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ olur.

$x \in [0, \pi]$ olduğundan $x = \frac{5\pi}{6}$ bulunur.

Sıra Sizde

$\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ifadesinin eşitini bulunuz.

Örnek 67

$\sin\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$ ifadesinin eşitini bulunuz.

Çözüm

$\arccos\frac{1}{2} = x$ olsun. Buradan $\cos x = \frac{1}{2}$ olup $x \in [0, \pi]$ olduğundan $x = \frac{\pi}{3}$ olur.

$\sin(\underbrace{\arccos\frac{1}{2}}_{x}) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ olur.

Bilgi

Tanjant Fonksiyonunun Ters Fonksiyonu

Tanjant fonksiyonunun bire bir ve örten olduğu aralıklardan biri $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığıdır. Bu aralıkta tanımlı $f:\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$ fonksiyonunun tersi de bir fonksiyondur. $f(x) = \tan x$ fonksiyonunun tersi $f^{-1}(x) = \arctan x$ biçiminde gösterilir. $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R}$, değer kümesi $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ olur. $y = \arctan x \iff x = \tan y$ olarak yazılabilir.

Örnek 68

$\arctan\sqrt{3} - \arctan(-1)$ ifadesinin eşitini bulunuz.

Çözüm

$\arctan\sqrt{3} = x$ olsun. Buradan $\tan x = \sqrt{3}$ ve $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ olduğundan $x = \frac{\pi}{3}$ bulunur.

$\arctan(-1) = y$ olsun. Buradan $\tan y = -1$ ve $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ olduğundan $y = -\frac{\pi}{4}$ bulunur. Buradan

$\arctan\sqrt{3} - \arctan(-1) = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \underset{(4)}{\frac{\pi}{3}} + \underset{(3)}{\frac{\pi}{4}} = \frac{7\pi}{12}$ olarak bulunur.

Örnek 69

$\sin(\arctan(-\sqrt{3}))$ ifadesinin eşitini bulunuz.

Çözüm

$\arctan(-\sqrt{3}) = x$ olsun. Buradan $\tan x = -\sqrt{3}$ olup $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ olduğundan $x = -\frac{\pi}{3}$ olur.

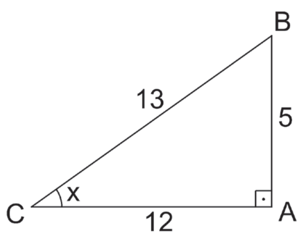
$\sin(\arctan(-\sqrt{3})) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ olarak bulunur.

Örnek 70

$\cos\left(\arctan\left(\frac{5}{12}\right)\right)$ ifadesinin eşitini bulunuz.

Çözüm

$\arctan\left(\frac{5}{12}\right) = x$ olsun. Böylece ifade $\cos\left(\underbrace{\arctan\left(\frac{5}{12}\right)}_{x}\right) = \cos x$ biçimine dönüşür. $\arctan\left(\frac{5}{12}\right) = x$ ise $\tan x = \frac{5}{12}$ olur. Bu koşula uygun bir dik üçgen çizilerek $\cos x$ değeri bulunabilir.



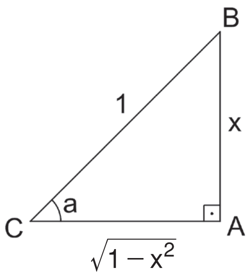
Yanda çizilen BAC dik üçgeninde BCA açısına x denirse $\tan x = \frac{5}{12}$ olduğundan $|AB| = 5$ birim ve $|AC| = 12$ birim seçilebilir. Pisagor teoremi kullanılarak $|BC| = 13$ birim olur. Buradan $\cos x = \frac{12}{13}$ olarak bulunur.

Örnek 71

$0 < x < 1$ olmak üzere $\tan(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$\arcsin x = a$ olsun. Buradan $\sin a = x$ olur. Bu koşula uyan bir BAC dik üçgeni çizilip bu üçgende Pisagor teoremi uygulanırsa



$$|CB|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$$
$$1^2 = x^2 + |AC|^2$$
$$|AC|^2 = 1 - x^2$$
$$|AC| = \sqrt{1-x^2} \text{ olur.}$$

Buradan $\tan\left(\underbrace{\arcsin x}_{a}\right) = \tan a = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ olarak bulunur.

Sıra Sizde

$\sin(\arctan x)$ ifadesinin eşitini bulunuz.

Bilgi

I birim fonksiyonu, "o" ifadesi fonksiyonlarda bileşke işlemini göstermek üzere bire bir ve örten olan f fonksiyonu için $(fof^{-1}) = I$ ve $(fof^{-1}) = I$ olduğundan arcsinx, arccosx ve arctanx fonksiyonlarının tanımlı olduğu aralıklarda

- $\sin(\arcsin x) = \arcsin(\sin x) = x$
- $\cos(\arccos x) = \arccos(\cos x) = x$
- $\tan(\arctan x) = \arctan(\tan x) = x$

Örnek 72

$\sin\left(\arcsin\left(\frac{17}{29}\right)\right)+\arctan\left(\tan\left(\frac{12}{29}\right)\right)$ ifadesinin eşitini bulunuz.

Çözüm

$\sin\left(\arcsin\left(\frac{17}{29}\right)\right)=\frac{17}{29}$ ve $\arctan\left(\tan\left(\frac{12}{29}\right)\right)=\frac{12}{29}$ olup

$\sin\left(\arcsin\left(\frac{17}{29}\right)\right)+\arctan\left(\tan\left(\frac{12}{29}\right)\right)=\frac{17}{29}+\frac{12}{29}=\frac{29}{29}=1$ olarak bulunur.

Örnek 73

$\cos\left(\arccos\left(\frac{11}{13}\right)\right)-\sin\left(\arcsin\left(\frac{2}{13}\right)\right)$ ifadesinin eşitini bulunuz.

Çözüm

$\cos\left(\arccos\left(\frac{11}{13}\right)\right)=\frac{11}{13}$ ve $\sin\left(\arcsin\left(\frac{2}{13}\right)\right)=\frac{2}{13}$ olup

$\cos\left(\arccos\left(\frac{11}{13}\right)\right)-\sin\left(\arcsin\left(\frac{2}{13}\right)\right)=\frac{11}{13}-\frac{2}{13}=\frac{9}{13}$ olarak bulunur.

Örnek 74

$\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right)+\tan(\arctan(2a+1))=\frac{7}{2}$ olduğuna göre a değerini bulunuz.

Çözüm

$\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}$ ve $\tan(\arctan(2a+1))=2a+1$ olup

$$\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right)+\tan(\arctan(2a+1))=\frac{7}{2}$$

$$\frac{1}{2}+2a+1=\frac{7}{2}$$

$$2a+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$$

$$2a=2$$

$a=1$ olarak bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıda verilen ifadelerin eşitlerini bulunuz.
   a) $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$
   b) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$
   c) $\arctan(-\sqrt{3})$
   ç) $\sin(\arctan(-1))$

2. $\arcsin\left(\frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{3}\right)$ ifadesinin eşitini bulunuz.

3. $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ ifadesinin eşitini bulunuz.

4. $\tan\left(\pi+\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ ifadesinin eşitini bulunuz.

5. $\cos(\arctan(-1)+\arcsin(1))$ ifadesinin eşitini bulunuz.

6. $x\in[-1,1]$ olduğuna göre $\cos(\arccos x)=x$ olduğunu gösteriniz.

7. $\sin\left(\arctan\frac{12}{5}\right)$ ifadesinin eşitini bulunuz.

8. $\arcsin\left(\sin\left(\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)\right)$ ifadesinin eşitini bulunuz.

9. $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{4}{5}\right)$ ifadesinin eşitini bulunuz.

10. $x\in\mathbb{R}$'dir. Buna göre $\cos(\arctan x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ olduğunu gösteriniz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 1

A) Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerlere doğru ifadeyi yazınız.

1. Saat yönü ile aynı yönlü açıya .... yönlü açı denir.

2. Bir derecelik açı ölçüsü .... saniyedir.

B) Aşağıda numaralarla verilen ifadeler ile harflerle verilen ifadeleri eşleştirip eşleşenleri altındaki kutuya yazınız.

3.

1. $\frac{5\pi}{4}$
2. $\frac{2\pi}{3}$
3. 240°
4. 150°

a) 30°
b) $\frac{4\pi}{3}$
c) 135°
ç) $\frac{5\pi}{3}$
d) $\frac{5\pi}{6}$
e) 120°
f) 225°

1.	2.	3.	4.

4.

1. 1300°
2. -1500°
3. $\frac{11\pi}{2}$
4. $-\frac{27\pi}{2}$

a) 120°
b) 220°
c) 300°
ç) $\frac{2\pi}{3}$
d) $\frac{3\pi}{2}$
e) $\frac{\pi}{2}$

1.	2.	3.	4.

C) Aşağıdaki açık uçlu soruların doğru cevabını bulunuz.

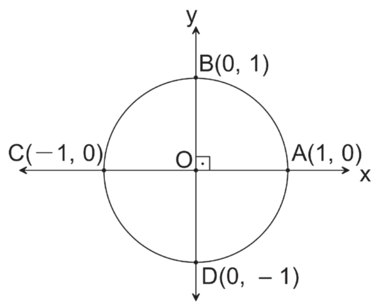
5. $35\,420''$ nin kaç derece, dakika ve saniye olduğunu bulunuz.

6. Ölçüsü 315° olan açının ölçüsünün radyan cinsinden eşitini bulunuz.

7. Ölçüsü $\frac{5\pi}{6}$ radyan olan açının ölçüsünün derece cinsinden eşitini bulunuz.

8. Bütünleri $102^\circ 45' 52''$ olan bir açının ölçüsünü derece, dakika ve saniye cinsinden bulunuz.

9 - 11. soruları aşağıda verilen bilgilere göre cevaplandırınız.



Yukarıdaki O merkezli birim çemberde verilen A noktası ve elde edilen noktalar çember üzerinde aşağıdaki gibi hareket ettiriliyor:

- A noktası, pozitif yönde $140°$ döndürüldüğünde açının bitim noktası K noktasıdır.
- K noktası, negatif yönde $\frac{17\pi}{18}$ radyan döndürüldüğünde açının bitim noktası M noktasıdır.
- M noktası, pozitif yönde $4560°$ döndürüldüğünde açının bitim noktası L noktasıdır.

9. KOM açısının ölçüsünün küçük değerinin kaç derece olduğunu bulunuz.

10. L noktasının koordinatlarını bulunuz.

11. M ile L noktaları arasındaki uzaklığın kaç birim olduğunu bulunuz.

D) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruların doğru seçeneğini işaretleyiniz.

12. $m(\widehat{A}) = 43°52'38''$ ve $m(\widehat{B}) = 21°44'42''$ olduğuna göre $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B})$ aşağıdakilerden hangisidir?

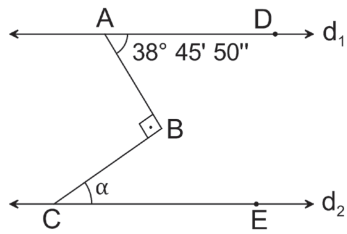
A) $63°37'20''$ B) $64°37'20''$ C) $65°37'20''$ D) $65°37'21''$ E) $65°37'22''$

13. **I.** Ölçüsü $2120°$ olan bir açının esas ölçüsü $320°$ dir.
II. Ölçüsü $-1840°$ olan bir açının esas ölçüsü $40°$ dir.
III. Ölçüsü $\frac{17\pi}{3}$ radyan olan bir açının esas ölçüsü $\frac{5\pi}{6}$ radyandır.
IV. Ölçüsü $-\frac{13\pi}{4}$ radyan olan bir açının esas ölçüsü $\frac{3\pi}{4}$ radyandır.

Yukarıda verilen ifadelerden hangileri doğrudur?

A) I, II B) I, III C) I, IV D) II, III E) II, IV

14.



Yukarıdaki şekilde
$d_1 \parallel d_2$, $m(\widehat{DAB}) = 38°45'50''$,
$[AB] \perp [BC]$ ve $m(\widehat{BCE}) = \alpha$ olduğuna göre
α değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $51°14'$ B) $51°14'05''$ C) $51°14'10''$ D) $52°14'10''$ E) $52°14'20''$

DEĞERLENDİRME
Cevaplarınızı cevap anahtarı ile karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorularla ilgili konuları veya faaliyetleri geri dönerek tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 2

A) Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerlere doğru ifadeyi yazınız.

1. $f(x) = \sin x$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun görüntü kümesi .... olur.

2. $2\cos x - 3$ ifadesinin alabileceği **en küçük** değer .... olur.

3. $\sin^2 \frac{3\pi}{7} + \cos^2 \frac{3\pi}{7}$ ifadesinin değeri........... olur.

B) Aşağıda numaralarla verilen ifadeler ile harflerle verilen ifadeleri eşleştirip eşleşenleri altındaki kutuya yazınız.

4. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere

1. $\tan x \cdot \cot x$
2. $2\sin^2 x + 2\cos^2 x$
3. $\frac{\sin x}{\cos x}$
4. $\frac{1 - \cos^2 x}{\sin x}$

a) $\cot x$
b) 1
c) -1
ç) 4
d) 2
e) $\tan x$
f) $\sin x$

1.	2.	3.	4.

5.

1. $\sin 210°$
2. $\sin(-540°)$
3. $\tan 300°$
4. $\cot 480°$

a) $\frac{1}{2}$
b) $-\sqrt{3}$
c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
ç) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$
d) 0
e) $-\frac{1}{2}$

1.	2.	3.	4.

C) Aşağıdaki açık uçlu soruların doğru cevabını bulunuz.

6. $a = \cos\left(\frac{11\pi}{5}\right)$

$b = \sin\left(-\frac{17\pi}{4}\right)$

$c = \cot\left(-\frac{8\pi}{3}\right)$

olduğuna göre a, b, c'nin işaretlerini bulunuz.

7. $a = \sin 25°$

$b = \cos 310°$

$c = \sin 160°$

$d = \cot 50°$

olduğuna göre a, b, c, d'nin küçükten büyüğe doğru sıralanışını bulunuz.

8. $a \in \mathbb{R}$ ve $x \in [0, 2\pi]$ olmak üzere

$\frac{2a - 13}{2} = \cos 2x$ olduğuna göre a'nın alabileceği kaç farklı tam sayı değeri olduğunu bulunuz.

9. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere

$$\left[\left(\frac{1 + 2\sin x \cdot \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^2 - 1\right] \cdot \sec x \cdot \operatorname{cosec} x$$

ifadesinin en sade hâlini yazınız.

10 -12. soruları aşağıda verilen bilgilere göre cevaplandırınız.

Burak Öğretmen, aşağıdaki uygulamayı yapmıştır:

- Tahtaya köşegen uzunluğu 8 cm olan bir ABCD karesi çizmiştir.
- $[AC]$ köşegenini çizip üzerinde $|EC| = 1$ cm olacak şekilde bir E noktası işaretlemiştir.
- D ve E noktalarını birleştirip $m(\widehat{DEA}) = \alpha$ olarak yazmıştır.

Buna göre

10. $\tan\alpha$ değerini bulunuz.

11. $\cos(\widehat{DEC})$ değerini bulunuz.

12. $\cot\alpha \cdot \sin(\widehat{DEC})$ değerini bulunuz.

D) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruların doğru seçeneğini işaretleyiniz.

13. $x = \sin 812°$

$y = \cos 1224°$

$z = \tan 2005°$

olduğuna göre x, y, z'nin işaretleri sırasıyla aşağıdakilerden hangisidir?

A) $+, +, -$ B) $+, -, +$ C) $+, -, -$ D) $-, +, -$ E) $-, +, +$

14. $a = \tan(142°)$

$b = \cot(324°)$

$c = \sin(110°)$

olduğuna göre a, b, c'nin küçükten büyüğe doğru sıralanışı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $a < b < c$ B) $c < b < a$ C) $c < a < b$ D) $b < c < a$ E) $b < a < c$

15. $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -3 \cdot \sin x + 7$ olduğuna göre g(x) fonksiyonunun alabileceği **en büyük** ve **en küçük** değerlerin toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 16 B) 14 C) 10 D) 4 E) -3

16. $\tan x - \cot x = 3$ olduğuna göre $\tan^3 x - \cot^3 x$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) 24 B) 27 C) 30 D) 32 E) 36

17. $\left(\dfrac{4\sin x - \cos^2 x + 4}{\sin x + 3}\right).(1 - \sin x)$ ifadesinin en sade hâli aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sin x$ B) $\sin^2 x$ C) $\cos^2 x$ D) $1 - \sin x$ E) $1 - \cos x$

18. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere

$(\sin^3 x + \sin x \cdot \cos^2 x + 1) \cdot \sec^2 x$ ifadesinin en sade hâli aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{\cos x - 1}$ B) $\frac{1}{1 - \cos x}$ C) $\frac{1}{1 + \cos x}$ D) $\frac{1}{1 - \sin x}$ E) $\frac{1}{1 + \sin x}$

19. $0 < x < \frac{\pi}{4}$ olmak üzere $\sqrt{1 - 2\sin x \cdot \cos x}$ ifadesinin en sade hâli aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sin x$ B) $\cos x$ C) $\sin x - \cos x$ D) $\cos x - \sin x$ E) 1

20. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $\frac{5}{1 + \cot^2 x} + \frac{5}{1 + \tan^2 x}$ ifadesinin en sade hâli aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 5 C) 10 D) 15 E) 20

21. $\frac{\sin 150° + \tan 225°}{\cos 330°}$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$ D) $4\sqrt{3}$ E) $5\sqrt{3}$

22. $\frac{\tan\frac{3\pi}{4} - \sin\frac{7\pi}{6}}{\sin\frac{7\pi}{4} \cdot \cos\frac{5\pi}{4}}$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) -2 B) -1 C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

23. A, B ve C bir üçgenin iç açılarının ölçüleri olmak üzere $\cos\left(\frac{B+C}{2}\right) - \sin\left(\frac{A}{2}\right)$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2\sin\frac{A}{2}$ B) $-2\sin\frac{A}{2}$ C) $\sin A$ D) 1 E) 0

24. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere

I. $\sin\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$

II. $\tan\left(\frac{9\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$

III. $\cot\left(\frac{23\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan\alpha$

ifadelerinin hangisi ya da hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III D) I ve II E) II ve III

25. $\frac{\tan(11\pi + \alpha) \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos(\alpha - 10\pi) \cdot \cot\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) -1 B) 0 C) 1 D) $\sin\alpha$ E) $\cos\alpha$

DEĞERLENDİRME

Cevaplarınızı cevap anahtarı ile karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorularla ilgili konuları veya faaliyetleri geri dönerek tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 3

A) Aşağıdaki açık uçlu soruların doğru cevabını bulunuz.

1. $a+b=\frac{\pi}{2}$ olmak üzere

$$\frac{\sin(3a-2b)\cdot\tan(5a-2b)}{\cot(3b-4a)\cdot\cos(3b-2a)}$$

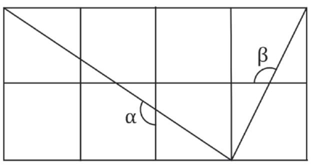
ifadesinin eşitini bulunuz.

2. $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ olmak üzere

$\cot x=-0,75$ olduğuna göre $\sin x+\cos x$

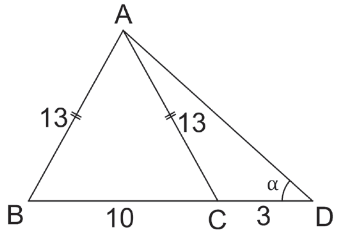
ifadesinin eşitini bulunuz.

3.



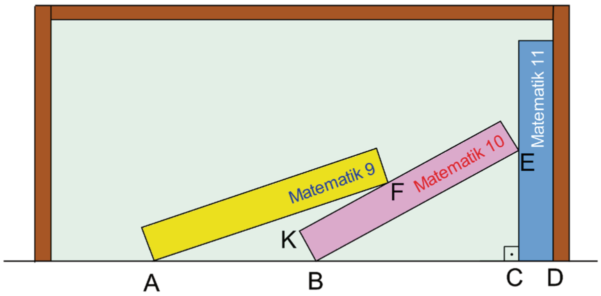
Özdeş karelerden oluşan yukarıdaki şekilde $\tan\alpha+\cot\beta$ ifadesinin değerini bulunuz.

4.



Yukarıdaki ABD üçgeninde B, C ve D noktaları doğrusaldır. $|AB|=|AC|=13$ cm, $|BC|=10$ cm, $|CD|=3$ cm ve $m(\widehat{ADC})=\alpha$ olarak verilmiştir. Buna göre $\tan\alpha$ değerini bulunuz.

5 - 6. soruları aşağıda verilen bilgilere göre cevaplandırınız.



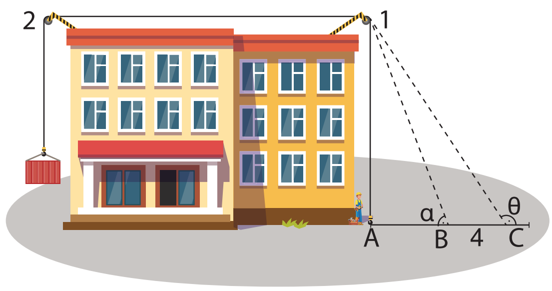
Yukarıdaki şekilde bir rafta boyutları aynı olan üç matematik kitabı verilmiştir.
Konumları verilen bu kitaplarla ilgili aşağıdaki bilgiler veriliyor.

- Kitapların görünen yüzleri dikdörtgendir.
- $|CD|=5$ cm, $|AB|=20$ cm
- $m(\widehat{BEC})=60^\circ$ ve $m(\widehat{BAF})=20^\circ$

5. $|AF|$'nun yaklaşık kaç cm olduğunu bulunuz.
$(\sin 10^\circ\approx 0,17)$

6. $|CE|$'nun yaklaşık kaç cm olduğunu bulunuz.

7 - 9. soruları aşağıda verilen bilgilere göre cevaplandırınız.



Yeni bir makara sistemi geliştiren Engin Bey bu makarayı yukarıdaki şekilde verildiği gibi kendi inşaatında kullanmaktadır. Makara sisteminde bir ucuna yük bağlanmış ipin diğer ucu, yer düzlemine dik bir şekilde A noktasına sabitlenmiştir. Bu makara sistemiyle ilgili aşağıdaki bilgiler veriliyor.

- Yük ilk durumda yerden 2 metre yüksekliktedir.
- A, B ve C noktaları doğrusaldır.
- A noktası ile 1 numaralı makara arasındaki uzaklık 12 m'dir.
- $|BC| = 4$ m'dir

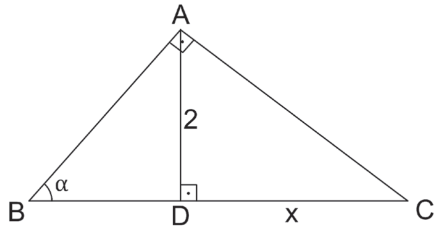
7. İpin ucu A noktasından alınıp B noktasına sabitlendiğinde yük bulunduğu konumdan 1 m yukarı çıkmıştır. İp B noktasındayken ipin yer ile yaptığı dar açı α olduğuna göre $\sin\alpha$ değerini bulunuz.

8. İpin ucu B noktasından alınıp C noktasına sabitlendiğinde yükün yerden kaç metre yukarıda olacağını bulunuz.

9. İpin ucu C noktasına sabitlendiğinde ipin yer ile yaptığı geniş açı θ olduğuna göre $\cos\theta$ değerini bulunuz.

B) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruların doğru seçeneğini işaretleyiniz.

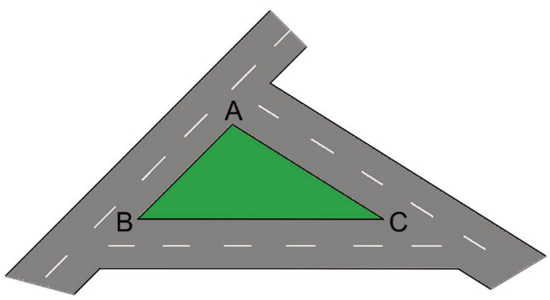
10.



Yukarıdaki şekilde BAC dik üçgendir. $m(\widehat{BAC}) = 90°$, $[AD] \perp [BC]$, $|AD| = 2$ cm ve $m(\widehat{ABC}) = \alpha$ olarak verilmiştir. Buna göre $|DC| = x$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2\sin\alpha$ B) $2\tan\alpha$ C) $2\cos\alpha$ D) $2\cot\alpha$ E) 2

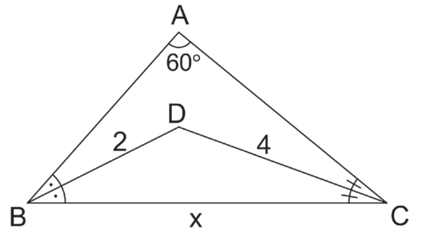
11.



Yukarıda verilen ABC üçgeni şeklindeki kavşakta $|AB| = 6\sqrt{2}$ m, $|BC| = 14$ m ve $m(\widehat{ABC}) = 45°$ olduğuna göre $|AC|$ kaç metredir?

A) $5\sqrt{2}$ B) 8 C) 10 D) 12 E) $8\sqrt{3}$

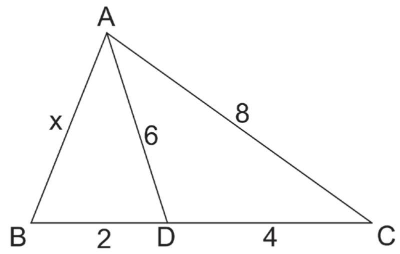
12.



Yukarıdaki şekilde verilen ABC üçgeninde D noktası iç açıortayların kesim noktasıdır. $|BD| = 2$ cm, $|DC| = 4$ cm ve $m(\widehat{A}) = 60°$ olduğuna göre $|BC| = x$ kaç cm'dir?

A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt{7}$ C) $2\sqrt{6}$ D) $2\sqrt{7}$ E) $\sqrt{30}$

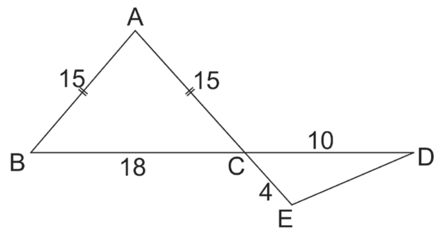
13.



Yukarıdaki şekilde verilen ABC üçgeninde B, D ve C noktaları doğrusal olmak üzere $|AD| = 6$ cm, $|AC| = 8$ cm, $|DC| = 4$ cm ve $|BD| = 2$ cm olarak verilmiştir. $|AB| = x$ kaç cm'dir?

A) $\sqrt{30}$ B) $\sqrt{34}$ C) $\sqrt{35}$ D) 6 E) $\sqrt{38}$

14.



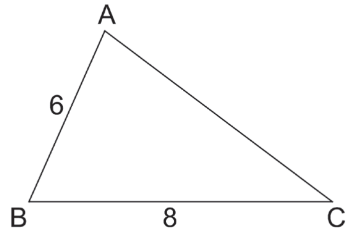
Yukarıdaki şekilde $[AE] \cap [BD] = \{C\}$; $|AB| = |AC| = 15$ cm, $|BC| = 18$ cm, $|CD| = 10$ cm, $|CE| = 4$ cm olarak verilmiştir. $|DE|$ kaç cm'dir?

A) $2\sqrt{15}$ B) $\sqrt{65}$ C) $\sqrt{66}$ D) $2\sqrt{17}$ E) $2\sqrt{19}$

15. ABC üçgeninde $|BC| = a$ cm, $|AC| = b$ cm ve $|AB| = c$ cm olarak verilmiştir. Kenar uzunlukları arasında $\sqrt{3} \cdot b \cdot c = c^2 - a^2 + b^2$ bağıntısı bulunduğuna göre $\sin(\widehat{BAC})$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $-\frac{1}{2}$

16.

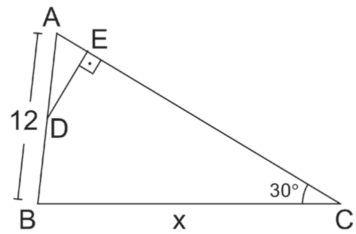


Şekildeki ABC üçgeninde $|AB| = 6$ cm, $|BC| = 8$ cm olarak verilmiştir.

Verilenlere göre $\frac{\sin\widehat{C}}{\sin\widehat{A}}$ oranı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{5}{3}$

17.



Şekildeki ABC üçgeninde $[DE] \perp [AC]$, $3 \cdot |DE| = 2 \cdot |AD|$, $|AB| = 12$ cm ve $m(\widehat{C}) = 30°$ olarak verilmiştir. Verilenlere göre $|BC| = x$ kaç cm'dir?

A) 18 B) 16 C) 14 D) 13 E) 12

DEĞERLENDİRME

Cevaplarınızı cevap anahtarı ile karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorularla ilgili konuları veya faaliyetleri geri dönerek tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 4

A) Aşağıda numaralarla verilen ifadeler ile harflerle verilen ifadelerin eşit olanlarını eşleştiriniz.

1. Aşağıda fonksiyonlar numaralandırılarak, periyotlar ise harflendirilerek verilmiştir.

1. $f(x) = \sin 2x$
2. $g(x) = \cos(5x)$
3. $h(x) = \tan(3x+4)$
4. $m(x) = \cot(20-6x)$

a) $\frac{2\pi}{5}$

b) $\frac{\pi}{5}$

c) $\frac{\pi}{3}$

ç) $\frac{\pi}{2}$

d) π

e) $\frac{\pi}{6}$

1.	2.	3.	4.

2.

1. $\arcsin\frac{1}{2}$
2. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
3. $\arctan(-1)$
4. $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

a) $\frac{\pi}{3}$

b) $\frac{\pi}{4}$

c) $\frac{\pi}{6}$

ç) $-\frac{\pi}{4}$

d) $-\frac{\pi}{6}$

e) $\frac{5\pi}{6}$

1.	2.	3.	4.

B) Aşağıdaki açık uçlu soruların doğru cevabını bulunuz.

3. $g(x) = 6 \cdot \tan(-6x+1) - \cot\left(\frac{\pi}{4}\right)$ kuralı ile verilen g fonksiyonunun periyodunu bulunuz.

4. $f(x) = 1001 \cdot \sin(4x-7) + 1002$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun periyodunu bulunuz.

5. $\alpha = \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ olduğuna göre $\cot\alpha$ ifadesinin değerini bulunuz.

6. Uygun açı değerleri için $f(x) = 2 \cdot \arcsin(3x-1)$ olduğuna göre $f^{-1}(x)$ ifadesini bulunuz.

7. Uygun açı değerleri için $f(x) = 2 \cdot \arctan x$ ve $g(x) = \sin(3x)$ olarak veriliyor. Buna göre $(fog)\left(\frac{\pi}{2}\right)$ değerini bulunuz.

C) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruların doğru seçeneğini işaretleyiniz.

8. $f(x)=6\cdot\cos^{7}\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\sin(3x-1)$ kuralı ile verilen f fonksiyonunun periyodu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{3\pi}{4}$ C) $\frac{2\pi}{3}$ D) $\frac{5\pi}{4}$ E) $\frac{4\pi}{3}$

9.

I. $f(x)=-3\cdot\sin(3-4x)$ fonksiyonunun periyodu $\frac{\pi}{4}$ radyandır.

II. $g(x)=\cos(-6x)$ fonksiyonunun periyodu $\frac{\pi}{3}$ radyandır.

III. $h(x)=3\tan(-5x+2)$ fonksiyonunun periyodu $\frac{2\pi}{5}$ radyandır.

IV. $m(x)=3\cdot\cot(3-7x)+7$ fonksiyonunun periyodu $\frac{\pi}{7}$ radyandır.

Yukarıda verilen ifadelerden hangileri doğrudur?

A) I ve II B) I ve III C) I ve IV D) II ve IV E) II ve III

10. $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\sqrt{3}$ B) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

11. $\tan\left(\arcsin 1+\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\sqrt{3}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) $\sqrt{3}$

12. $\cos\left(\arctan\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)\right)$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) 1 E) $\sqrt{3}$

13. $\tan\left(7\pi-\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) -1 B) 0 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ E) $\sqrt{3}$

14. $f:\mathbb{R}\rightarrow[-1,1]$, $f(x)=\sin x$ fonksiyonu ile ilgili aşağıdaki bilgiler verilmiştir:

I. Grafiği orijine göre simetriktir.

II. Grafiği y eksenine göre simetriktir.

III. Periyodu 2π'dir.

IV. Grafiği x eksenine göre simetriktir.

V. Periyodu π'dir.

Bu bilgilerden kaç tanesi doğrudur?

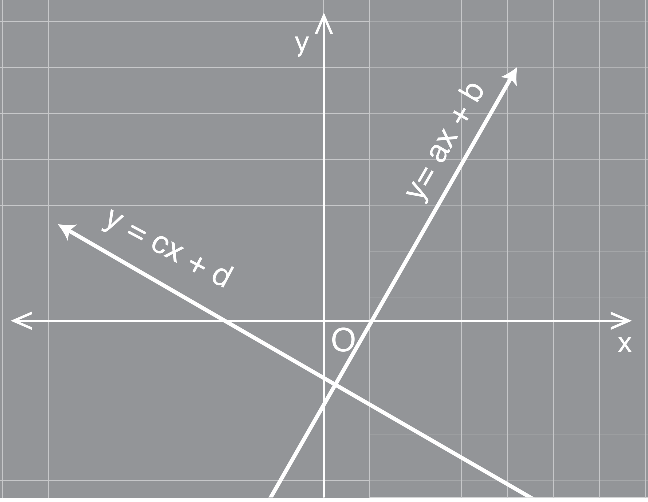
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

DEĞERLENDİRME

Cevaplarınızı cevap anahtarı ile karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorularla ilgili konuları veya faaliyetleri geri dönerek tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.

ANALİTİK GEOMETRİ

2



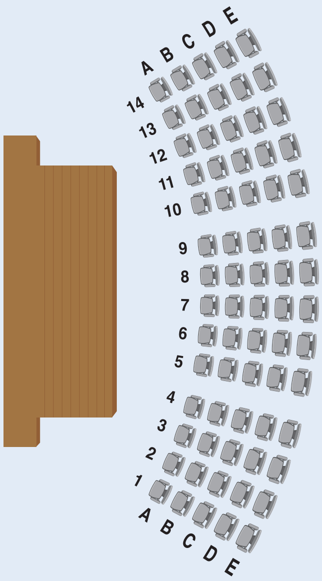
Analitik Geometri

11. 2. 1. Doğrunun Analitik İncelenmesi

11.2. ANALİTİK GEOMETRİ

Hazırlık Çalışması

1.



Volkan ve Fazilet, oturma düzeni yanda verilen şekildeki gibi olan tiyatro salonuna hafta sonu sevdikleri bir oyunu izlemeye gidiyorlar. Aldıkları biletlerde oturacakları koltuk numaralarının D7 ve E8 olduğunu görüyorlar. Salona girdiklerinde oturacakları koltukları nasıl bulabilirler?

2.

Otomobili ile seyahate çıkan Gökhan'ın yolculuğu esnasında deniz seviyesinden yüksekliği (rakımı) 851 metre olan, yolun eğimini %10 olarak gösteren trafik levhasını geçtiği andan 2 km sonra bulunduğu noktanın deniz seviyesinden yüksekliği (rakımı) kaç metredir?

3.

Bilgi: Ekvator'a paralel olarak çizilen çizgilere paralel denir. İki paralel arası mesafe 111 km'dir.

15 Temmuz Şehitler Köprüsü'nden geçen 29° doğu meridyeni üzerinde bulunan 41° 07′ kuzey enleminden Fethiye'den geçen 36° 37′ kuzey enlemine gidilebilecek en kısa yolun uzunluğunun kaç km olduğunu bulunuz.

11.2.1. Doğrunun Analitik İncelenmesi

Analitik düşünme, günlük hayatımızı kolaylaştıran birçok davranışa ve teknolojiye altyapı oluşturmuştur. Örneğin bulunduğu bir yerden başka bir yere gitmek isteyen biri, önce kendi konumunu sonra gideceği yerin konumunu belirleyip hareket eder. Bu amaçla deneyimleri doğrultusunda hedef harita oluşturur ve hedefe ulaşmak için en uygun yolu seçer. Kişi, uygun bularak seçtiği bu yolla daha az enerji harcayarak daha kısa sürede hedefine ulaşır.

İnsanlar teknolojinin gelişmesiyle istedikleri yere gidebilmek için adres bulmada zorlandıklarında "yol kılavuzu" anlamına gelen navigasyon cihazına başvurmaktadırlar. Bu cihaz sayesinde ulaşmak istedikleri adrese, sunulan seçenekli ulaşım yollarından en uygununu seçerek varabilmektedirler. Günümüzde ulaşımın kısa zamanda gerçekleştirilmesi ihtiyacı şehir hayatı için bir zorunluluk olmuştur. Örneğin bir saniyenin bile önemli olduğu acil hastaları ambulansla nakleden sağlık ekipleri, yardıma yetişmek zorunda olan itfaiye ekipleri, olay yerine ulaşmak zorunda olan polis ekipleri gibi zamanla yarışan tüm meslek grupları için bu teknoloji büyük kolaylık sağlamaktadır. Bu teknolojiyi besleyen, büyüten ve hizmete sunan bilim dallarının başında analitik geometri gelmektedir.

Terimler ve Kavramlar
- Analitik Düzlem
- İki Nokta Arasındaki Uzaklık
- Doğrunun Eğimi
- Eğim Açısı
- İki Doğrunun Paralelliği
- İki Doğrunun Dikliği

Sembol ve Gösterimler
- $A(x, y)$
- $|AB|$
- m
- $d_1 \parallel d_2$
- $d_1 \perp d_2$

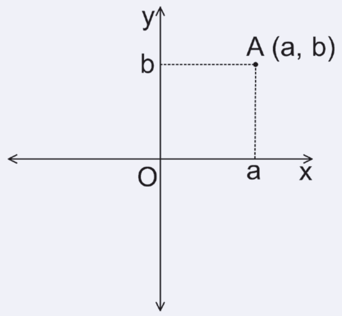
Neler Öğreneceksiniz?

- Analitik düzlemde iki nokta arasındaki uzaklığı veren bağıntıyı elde ederek problem çözmeyi,
- Bir doğru parçasını belli oranda (içten veya dıştan) bölen noktanın koordinatlarını hesaplamayı,
- Analitik düzlemde doğruları inceleyerek işlem yapmayı,
- Bir noktanın bir doğruya uzaklığını hesaplamayı öğreneceksiniz.

11.2.1.1. Analitik Düzlemde İki Nokta Arasındaki Uzaklık

Bilgi

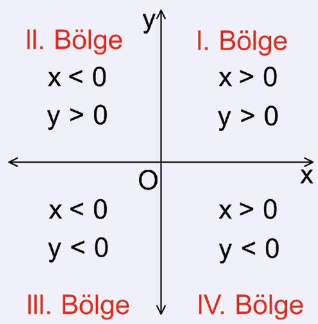
İki sayı doğrusunun 0 (sıfır) sayısına karşılık gelen O noktasında biri yatay diğeri dikey doğruların dik kesişmesiyle oluşan sisteme **dik koordinat sistemi** denir. Bu dik koordinat sisteminin bulunduğu düzleme ise **analitik düzlem** denir.



Yatay olarak alınan sayı doğrusuna **x ekseni**, dikey olarak alınan sayı doğrusuna **y ekseni** denir. x eksenine **apsis ekseni**, y eksenine **ordinat ekseni** denir.

Koordinat sisteminde alınan herhangi bir $A(a, b)$ için $x = a$ ve $y = b$ doğrularının kesiştiği noktaya **A noktasının koordinatları** denir. A noktasının koordinatları (a, b) ikilisidir.
Koordinat sisteminde x ekseni üzerindeki noktaların ordinatları sıfır olup (x, 0) biçimindedir. y ekseni üzerindeki noktaların apsisleri sıfır olup (0, y) biçimindedir. Yatay ve dikey eksenlerin kesim noktasına $O(0, 0)$ **başlangıç noktası (orijin)** denir.

Koordinat sistemini oluşturan eksenler analitik düzlemi dört bölgeye ayırır. Analitik düzlemde belirlenen $A(x, y)$ noktasının koordinatlarına göre hangi bölgede olduğu aşağıda verilmiştir.



$x > 0$ ve $y > 0$ ise A noktası I. bölgededir.

$x < 0$ ve $y > 0$ ise A noktası II. bölgededir.

$x < 0$ ve $y < 0$ ise A noktası III. bölgededir.

$x > 0$ ve $y < 0$ ise A noktası IV. bölgededir.

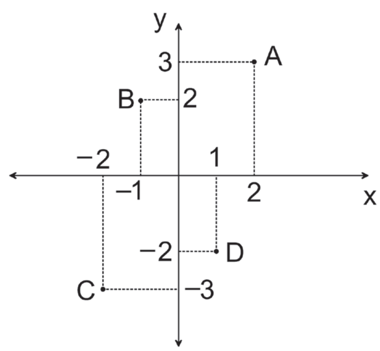
x ve y eksenleri üzerindeki noktalar hiçbir bölgeye ait değildir.

Örnek 1

$A(2, 3)$, $B(-1, 2)$, $C(-2, -3)$ ve $D(1, -2)$ noktalarını analitik düzlemde gösteriniz.

Çözüm

Verilen noktaların analitik düzlemdeki gösterimleri aşağıdaki gibidir.



Örnek 2

Analitik düzlemde $A(k+2,\ 2)$ noktası y ekseni üzerinde, $B(-1,\ n-6)$ noktası x ekseni üzerinde olduğuna göre k ve n değerlerini bulunuz.

Çözüm

y ekseni üzerindeki noktanın apsisi sıfır olup $A(k+2,\ 2)$ noktasında $k+2=0 \Rightarrow k=-2$ olur.
x ekseni üzerindeki noktanın ordinatı sıfır olup $B(-1,\ n-6)$ noktasında $n-6=0 \Rightarrow n=6$ olur.

Örnek 3

$A(b,\ -a)$ noktası analitik düzlemin IV. bölgesinde olduğuna göre $B(a,\ -b)$ noktasının analitik düzlemin kaçıncı bölgesinde olduğunu bulunuz.

Çözüm

$A(b,\ -a)$ noktası analitik düzlemin IV. bölgesinde olduğundan
$b>0$, "$b \rightarrow +$" ve $-a<0 \Rightarrow a>0$, "$a \rightarrow +$" bulunur. Buradan $B(a,\ -b)$ noktası
$a>0$ ve $b>0 \Rightarrow -b<0 \Rightarrow B(a,\ -b)$ olup analitik düzlemin IV. bölgesindedir.

Örnek 4

$A(a-1,\ 3-a)$ noktası analitik düzlemin I. bölgesinde, $B(b+2,\ b-3)$ noktası analitik düzlemin IV. bölgesinde olduğuna göre $3a-2b$ ifadesinin alabileceği **en büyük** tam sayı değerini bulunuz.

Çözüm

Verilen $A(a-1,\ 3-a)$ noktası analitik düzlemin I. bölgesinde olduğundan
$a-1>0 \Rightarrow a>1$ ve $3-a>0 \Rightarrow 3>a$ olup $1<a<3 \Rightarrow 3<3a<9$ ...(I) ve
$B(b+2,\ b-3)$ noktası analitik düzlemin IV. bölgesinde olduğundan
$b+2>0 \Rightarrow b>-2$ ve $b-3<0 \Rightarrow b<3$ olup $-2<b<3 \Rightarrow -6<-2b<4$ ...(II) elde edilir. $3a-2b$ ifadesinin elde edilebilmesi için I ile II numaralı eşitsizlik taraf tarafa toplanırsa
$3+(-6)<3a-2b<9+4 \Rightarrow -3<3a-2b<13$ bulunur. Buradan $3a-2b$ ifadesinin en büyük tam sayı değeri 12 olur.

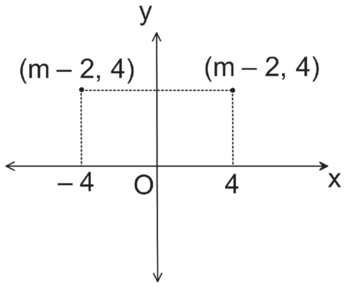
» Sıra Sizde

Analitik düzlemde $A(2c,\ 3a-b)$ noktası x ekseni üzerinde, $B(a+2,\ c-1)$ noktası orijin üzerinde olduğuna göre $a+b+c$ ifadesinin değerini bulunuz.

Örnek 5

Analitik düzlemde $A(m-2,\ 4)$ noktasının y eksenine olan uzaklığı 4 birim olduğuna göre m'nin alabileceği değerler toplamını bulunuz.

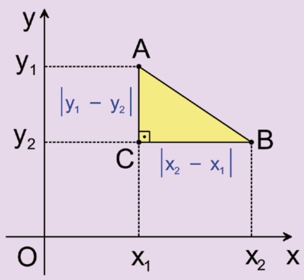
Çözüm



Analitik düzlemde $A(m-2,\ 4)$ noktasının y eksenine olan uzaklığı 4 birim olduğundan bu noktanın apsisi, şekilde verildiği gibi ya 4 ya da -4 olmalıdır. Buradan $|m-2|=4$ olup $m-2=4 \Rightarrow m=6$ veya $m-2=-4 \Rightarrow m=-2$ bulunur. m'nin alabileceği değerler toplamı $6+(-2)=4$ olur.

Buluyorum

a) İki Nokta Arasındaki Uzaklık



Şekildeki analitik düzlemde $A(x_1,\ y_1)$ ve $B(x_2,\ y_2)$ noktaları arasındaki uzaklık, ACB dik üçgeninde Pisagor bağıntısı uygulanarak

$|AB|^2=|BC|^2+|AC|^2$

$|AB|^2=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2$

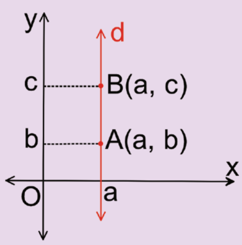
$|AB|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$

$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ bulunur.

Bu durum $(x_2-x_1)^2=(x_1-x_2)^2$ olduğundan

$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ şeklinde de gösterilebilir.

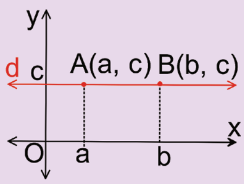
b) Apsisleri Eşit İki Nokta Arasındaki Uzaklık



Yanda verilen şekildeki $A(a,\ b)$ ve $B(a,\ c)$ noktaları arasındaki uzaklık, iki nokta arasındaki uzaklık formülü uygulanırsa

$|AB|=\sqrt{(a-a)^2+(c-b)^2}=\sqrt{0+(c-b)^2}=|c-b|$ olur.

c) Ordinatları Eşit İki Nokta Arasındaki Uzaklık



Yanda verilen şekildeki $A(a,\ c)$ ve $B(b,\ c)$ noktaları arasındaki uzaklık, iki nokta arasındaki uzaklık formülü uygulanırsa

$|AB|=\sqrt{(a-b)^2+(c-c)^2}=\sqrt{(a-b)^2+0}=|a-b|$ olur.

Örnek 6

Analitik düzlemde

a) $A(5, -1)$ ve $B(3, -1)$ noktaları arasındaki uzaklığın kaç birim olduğunu bulunuz.

b) $C(2, -3)$ ve $D(2, a)$ noktaları arasındaki uzaklık 6 birim olduğuna göre a'nın alabileceği değerler toplamını bulunuz.

Çözüm

a) Ordinatları eşit olan $A(5, -1)$ ve $B(3, -1)$ noktaları arasındaki uzaklık, bu noktaların apsisleri farkının mutlak değerine eşittir. Dolayısıyla $|AB| = |5-3| = 2$ birim olur.

b) Apsisleri eşit olan $C(2, -3)$ ve $D(2, a)$ noktaları arasındaki uzaklık, bu noktaların ordinatları farkının mutlak değerine eşittir. Dolayısıyla $|CD| = |a-(-3)| = 6 \Rightarrow |a+3| = 6$ bulunur. Buradan

$$|a+3| = 6 \Rightarrow \begin{cases} a+3=6 \Rightarrow a=3 \\ a+3=-6 \Rightarrow a=-9 \end{cases}$$

olacağından a'nın alabileceği değerler toplamı $3+(-9) = -6$ olur.

Örnek 7

Analitik düzlemde $A(-5, 3)$ ve $B(7, -2)$ noktalarının arasındaki uzaklığın kaç birim olduğunu bulunuz.

Çözüm

$A(-5, 3)$ noktasının koordinatları $x_1 = -5,\ y_1 = 3$ ve $B(7, -2)$ noktasının koordinatları $x_2 = 7,\ y_2 = -2$ ile gösterilirse A ve B noktaları arasındaki uzaklık,

$$|AB| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$$

$$|AB| = \sqrt{(-5-7)^2 + (3-(-2))^2}$$

$$|AB| = \sqrt{144+25}$$

$$|AB| = \sqrt{169}$$

$|AB| = 13$ birim bulunur.

Örnek 8

Analitik düzlemde $A(k, 2)$ ve $B(1, -4)$ olan iki nokta veriliyor. $|AB| = 10$ birim olduğuna göre k'nin alabileceği değerleri bulunuz.

Çözüm

$A(k, 2)$ noktasının koordinatları $x_1 = k,\ y_1 = 2$; $B = (1, -4)$ noktasının koordinatları $x_2 = 1,\ y_2 = -4$ alınıp $|AB| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$ ifadesinde yerlerine yazılırsa

$$(10)^2 = \left(\sqrt{(k-1)^2 + (2-(-4))^2}\right)^2 \Rightarrow 100 = (k-1)^2 + 36 \Rightarrow (k-1)^2 = 64 \Rightarrow |k-1| = 8$$ bulunur.

Buradan $k-1 = 8$ veya $k-1 = -8$ olur.

$k = 9 \qquad k = -7$

Örnek 9

Analitik düzlemde köşelerinin koordinatları $A(-2, 3)$, $B(6, 3)$ ve $C(6, 9)$ olan ABC üçgeninin çevresinin kaç birim olduğunu bulunuz.

Çözüm

$Ç(\widehat{ABC}) = |AB| + |BC| + |AC|$ olur. İki nokta arasındaki uzaklık; iki noktanın apsisler farkının karesi ile ordinatlar farkının kareleri toplamının kareköküne eşit olduğundan

$|AB| = \sqrt{(6-(-2))^2 + (3-3)^2} = \sqrt{64+0} = 8$ birim,

$|BC| = \sqrt{(6-6)^2 + (9-3)^2} = \sqrt{0+36} = 6$ birim,

$|AC| = \sqrt{(6-(-2))^2 + (9-3)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$ birim bulunur. Buradan

$Ç(\widehat{ABC}) = |AB| + |BC| + |AC| = 8 + 6 + 10 = 24$ birim olur.

Örnek 10

Analitik düzlemde $A(3, -2)$, $B(2, 1)$ noktalarına eşit uzaklıkta bulunan x ekseni üzerindeki C noktasının apsisini bulunuz.

Çözüm

C noktası analitik düzlemde x ekseni üzerinde olduğundan koordinatları $C(a, 0)$ şeklindedir.

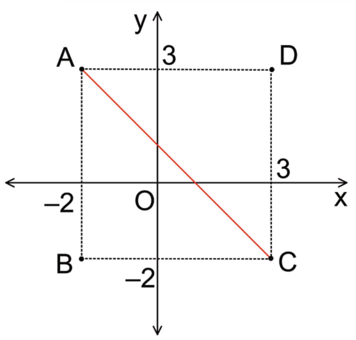
$|AC| = |BC|$ olduğundan

$$\sqrt{(3-a)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{(2-a)^2 + (1-0)^2}$$
$$\left(\sqrt{(3-a)^2 + (-2-0)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(2-a)^2 + (1-0)^2}\right)^2$$
$$(3-a)^2 + (-2-0)^2 = (2-a)^2 + (1-0)^2$$
$$9 - 6a + \cancel{a^2} + 4 = 4 - 4a + \cancel{a^2} + 1$$
$$13 - 6a = 5 - 4a$$
$$-2a = -8$$
$$a = 4 \text{ olur.}$$

Örnek 11

Analitik düzlemde iki köşesinin koordinatları $A(-2, 3)$, $C(3, -2)$ olan ABCD karesinin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

Çözüm



Yandaki şekilde analitik düzlemde iki köşesinin koordinatları verilen ABCD karesinde $|AC|$ köşegen uzunluğu olup değeri

$|AC| = \sqrt{(-2-3)^2 + (3-(-2))^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} \Rightarrow |AC| = 5\sqrt{2}$

birimdir. Buradan ABCD karesinin bir kenar uzunluğuna a birim denirse

$|AC| = a\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \Rightarrow a = 5$ birim bulunur. Bir kenar uzunluğu 5 birim olan ABCD karesinin alanı $5^2 = 25$ birimkare olur.

Sıra Sizde

Analitik düzlemde köşelerinin koordinatları $A(-2, 3)$, $B(-6, -4)$ ve $C(7, -7)$ olan ABCD paralelkenarının çevresinin kaç birim olduğunu bulunuz.

ALIŞTIRMALAR

1. $A(k-2, m+2)$ noktası orijin olduğuna göre k ve m değerlerini bulunuz.

2. $A(-k-3, k-8)$ noktası analitik düzlemin III. bölgesinde olduğuna göre k'nin alabileceği değer aralığını bulunuz.

3. $A(-a, a \cdot b)$ noktası analitik düzlemin II. bölgesinde olduğuna göre $A\left(b^2 \cdot a, -\frac{a}{b}\right)$ noktasının analitik düzlemin kaçıncı bölgesinde olduğunu bulunuz.

4. Analitik düzlemde verilen $A(-1, 2)$, $B(3, k)$ noktaları arasındaki uzaklık 5 birim olduğuna göre k'nin alabileceği değerler toplamını bulunuz.

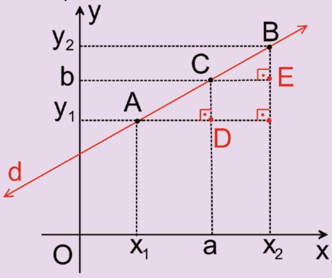
5. Analitik düzlemde y ekseni üzerinde bulunan ve $A(2, -3)$, $B(-4, 5)$ noktalarına eşit uzaklıkta olan noktanın ordinatını bulunuz.

6. Köşeleri $A(1, 2)$, $B(-3, 4)$ ve $C(-2, 1)$ noktaları olan $\widehat{ABC}$'nin çevre uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.

11.2.1.2. Bir Doğru Parçasını Belli Bir Oranda (İçten veya Dıştan) Bölen Noktanın Koordinatları

Buluyorum

Şekildeki analitik düzlemde $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ noktalarını $\dfrac{|AC|}{|BC|}=k$ olacak şekilde bölen $C\in[AB]$ noktasına $[AB]$'nı k oranında **içten bölen nokta** denir ($[AB]$ y eksenine paralel olmamak üzere). Buradan C noktasının koordinatları aşağıdaki şekilde bulunabilir.



$[AD]\parallel[CE]$ olup $(\widehat{ADC})$ ve $(\widehat{CEB})$ benzerdir.

$\dfrac{|AC|}{|BC|}=\dfrac{a-x_1}{x_2-a}=k\Rightarrow a=\dfrac{x_1+kx_2}{k+1}$,

$\dfrac{|CD|}{|EB|}=\dfrac{b-y_1}{y_2-b}=k\Rightarrow b=\dfrac{y_1+ky_2}{k+1}$ yazılır. Buradan

$C(a,b)=C\left(\dfrac{x_1+kx_2}{k+1},\ \dfrac{y_1+ky_2}{k+1}\right)$ olur.

Örnek 12

Analitik düzlemde koordinatları $A(1,\ 5)$, $B(9,\ -3)$ olan iki nokta veriliyor. $C\in[AB]$, $\dfrac{|AC|}{|BC|}=\dfrac{1}{3}$ olacak şekilde C noktasının koordinatlarını bulunuz.

Çözüm

1. yol

$C(a,\ b)$ olsun. $\dfrac{|AC|}{|BC|}=k=\dfrac{1}{3}$, $A(1,\ 5)=A(x_1,\ y_1)$ ve $B(9,\ -3)=B(x_2,\ y_2)$ olmak üzere

$$a=\frac{x_1+kx_2}{k+1}=\frac{1+\frac{1}{\cancel{3}}\cdot\cancel{9}}{\frac{1}{3}+1}=\frac{1+3}{\frac{4}{3}}=\frac{12}{4}=3 \text{ ve } b=\frac{y_1+ky_2}{k+1}=\frac{5+\frac{1}{\cancel{3}}\cdot(-\cancel{3})}{\frac{1}{3}+1}=\frac{5-1}{\frac{4}{3}}=3$$ bulunur. Dolayısıyla $C(a,\ b)=C(3,\ 3)$ olur.

2. yol

$C\in[AB]$, $\dfrac{|AC|}{|BC|}=\dfrac{1}{3}$ olacak şekilde $C(a,\ b)$ alınarak A, B, C noktaları aynı doğru üzerinde aşağıdaki gibi gösterilir.

t 3t

A(1, 5) C(a, b) B(9, – 3)

A ve B noktalarının apsisleri için A noktasından B noktasına 4t birimde 8 artış olduğundan C noktasından B noktasına 3t birimde 6 artış olur. Dolayısıyla C noktasının apsisi $a+6=9\Rightarrow a=3$ bulunur.
A ve B noktalarının ordinatları için A noktasından B noktasına 4t birimde 8 azalma olduğundan C noktasından B noktasına 3t birimde 6 azalma olur. Dolayısıyla C noktasının ordinatı $b-6=-3\Rightarrow b=3$ bulunur. Buradan $C(3,\ 3)$ olur.

Örnek 13

Analitik düzlemde koordinatları $A(-3,\ 2)$, $B(7,\ -3)$ olan iki nokta veriliyor. $C\in[AB]$, $\dfrac{|AB|}{|AC|}=\dfrac{5}{2}$ olacak şekilde C noktasının koordinatlarını bulunuz.

Çözüm

$C(a,\ b)$ olsun. $\frac{|AB|}{|AC|} = k = \frac{5}{2}$ olup $A(-3,\ 2),\ B(7,\ -3)$ ifadeleri sayı doğrusu üzerinde aşağıdaki şekilde olduğu gibi gösterilir.

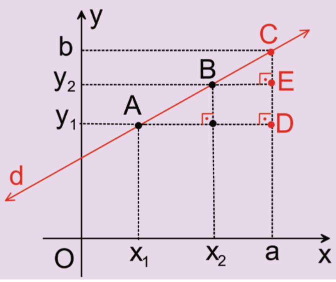
2t 3t

A(–3, 2) C(a, b) B(7, – 3)

A ve B noktalarının apsisleri için A noktasından B noktasına 5t birimde $7-(-3)=10$ artış olduğundan A noktasından C noktasına 2t birimde 4 artış olur. Dolayısıyla C noktasının apsisi $a=-3+4=1$ bulunur. A ve B noktalarının ordinatları için A noktasından B noktasına 5t birimde 5 azalma olduğundan A noktasından C noktasına 2t birimde 2 azalma olur. Dolayısıyla C noktasının ordinatı $b=2-2=0$ bulunur. Buradan C noktasının koordinatı $C(1,\ 0)$ olur.

Buluyorum

Şekildeki analitik düzlemde $A(x_1,\ y_1),\ B(x_2,\ y_2)$ noktaları ile doğrusal olan $\frac{|AC|}{|BC|} = k$ olacak şekilde bölen $C \notin [AB]$ noktasına $[AB]$'nı k oranında **dıştan bölen nokta** denir ($[AB]$ y eksenine paralel olmamak üzere). Buradan C noktasının koordinatları aşağıdaki şekilde bulunabilir.



$[AD] \mathbin{/\!/} [BE]$ olup $\widehat{ADC}$ ve $\widehat{BEC}$ benzerdir.

$\frac{|AD|}{|BE|} = \frac{a-x_1}{a-x_2} = k \Rightarrow a = \frac{x_1-kx_2}{1-k}$ $(k \neq 1)$,

$\frac{|DC|}{|EC|} = \frac{b-y_1}{b-y_2} = k \Rightarrow b = \frac{y_1-ky_2}{1-k}$ yazılır. Buradan

$C(a,\ b) = C\left(\frac{x_1-kx_2}{1-k},\ \frac{y_1-ky_2}{1-k}\right)$ olur.

Örnek 14

Analitik düzlemde $A(4,\ 8)$ ve $B(-4,\ 12)$ noktaları veriliyor. $\frac{|BC|}{|AC|} = 3$ olacak biçimdeki $[AB]$'nın dışında, A ve B noktaları ile doğrusal olan C noktasının koordinatlarını bulunuz.

Çözüm

1. yol

$A(4,\ 8) \Rightarrow x_2=4,\ y_2=8$ ve $B(-4,\ 12) \Rightarrow x_1=-4,\ y_1=12$ olur.

Bu durumda $C(a,\ b) = C\left(\frac{x_1-kx_2}{1-k},\ \frac{y_1-ky_2}{1-k}\right) = C\left(\frac{(-4)-3\cdot 4}{1-3},\ \frac{12-3\cdot 8}{1-3}\right) = C(8,\ 6)$ olur.

2. yol

$\frac{|BC|}{|AC|} = 3$ ise $k=3$ olup A, B, C noktaları aynı doğru üzerinde aşağıda verilen şekildeki gibi gösterilir.

2t t

B(–4, 12) A(4, 8) C(a , b)

A ve B noktalarının apsisleri için B noktasından A noktasına 2t birimde 8 artış olduğundan B noktasından C noktasına 3t birimde 12 artış olur. Dolayısıyla C noktasının apsisi $-4+12=8$ bulunur.
A ve B noktalarının ordinatları için B noktasından A noktasına 2t birimde 4 azalış olduğundan B noktasından C noktasına 3t birimde 6 azalış olur. Dolayısıyla C noktasının ordinatı $12-6=6$ bulunur.

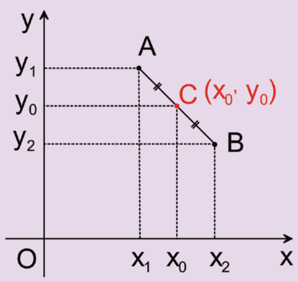
Sıra Sizde

Analitik düzlemde koordinatları $A(5,\ 3)$, $B(-3,\ -1)$ olan iki nokta veriliyor. $C \notin [AB]$, $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{1}{3}$ olacak şekilde A ve B noktaları ile doğrusal olan C noktasının koordinatlarını bulunuz.

Bir Doğru Parçasının Orta Noktasının Koordinatı

Buluyorum

Şekildeki analitik düzlemde koordinatları $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ olan $[AB]$'nı $k = 1$ oranında içten bölen C noktasının koordinatı $C(x_0,\ y_0)$ olmak üzere



$C(x_0,\ y_0) = \left(\frac{x_1 + kx_2}{k+1},\ \frac{y_1 + ky_2}{k+1}\right)$ eşitliğinde $k = 1$ değeri yerine yazılırsa

$$x_0 = \frac{x_1 + kx_2}{k+1} = \frac{x_1 + 1 \cdot x_2}{1+1} = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

$$y_0 = \frac{y_1 + ky_2}{k+1} = \frac{y_1 + 1 \cdot y_2}{1+1} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

olup C noktasının koordinatı $C\left(\frac{x_1 + x_2}{2},\ \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ olur.

Örnek 15

Analitik düzlemde koordinatları $A(-1,\ 2)$, $B(a,\ b)$ ve $C(-3,\ 1)$ olan noktalar veriliyor. C noktası $[AB]$'nın orta noktası olduğuna göre $a - b$ değerini bulunuz.

Çözüm

$A(-1,\ 2) = A(x_1,\ y_1)$, $B(a,\ b) = B(x_2,\ y_2)$ ve $C(x_0,\ y_0) = C(-3,\ 1)$ denirse

$[AB]$'nın orta noktası $C(x_0,\ y_0)$ olduğundan

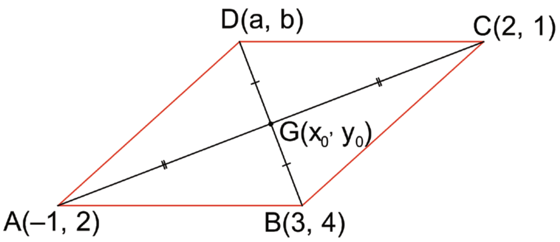
$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1 + a}{2} = -3 \Rightarrow a = -5$ ve $\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2 + b}{2} = 1 \Rightarrow b = 0$ bulunur.

Buradan $a - b = -5 - 0 = -5$ olur.

Örnek 16

Analitik düzlemde köşelerinin koordinatları $A(-1,2)$, $B(3,4)$, $C(2,1)$ ve $D(a,b)$ olan ABCD paralelkenarında D noktasının koordinatlarını bulunuz.

Çözüm



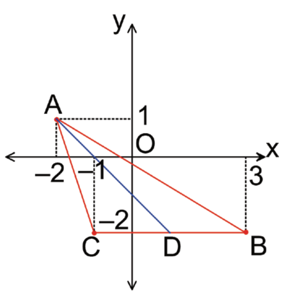
ABCD paralelkenarının köşegenlerinin kesim noktası $G(x_0, y_0)$ olsun. Buradan $[AC]$'nın orta noktası $G\left(\frac{-1+2}{2}, \frac{2+1}{2}\right) = G\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ bulunur. $G\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ noktası aynı zamanda $[BD]$'nın da orta noktası olduğundan

$G\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = G\left(\frac{a+3}{2}, \frac{b+4}{2}\right) \Rightarrow \frac{a+3}{2} = \frac{1}{2}$ ve $\frac{b+4}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = -2$ ve $b = -1$ bulunur. Buradan $D(-2, -1)$ olur.

Örnek 17

Analitik düzlemde koordinatları $A(-2,1)$, $B(3,-2)$ ve $C(-1,-2)$ olan $\widehat{ABC}$ için $[BC]$'na ait kenarortay uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.

Çözüm



Yandaki şekilde $D(x_0, y_0)$ noktası $[BC]$'nın orta noktası olduğundan D noktasının apsisi B ve C noktalarının apsisler toplamının yarısına, ordinatı ise B ve C noktalarının ordinatları toplamının yarısına eşit olup

$D(x_0, y_0) = D\left(\frac{3+(-1)}{2}, \frac{-2+(-2)}{2}\right) = D(1, -2)$ bulunur.

$[BC]$'na ait kenarortay $[AD]$ olup

$|AD| = \sqrt{(-2-1)^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{9+9} \Rightarrow |AD| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ birim olur.

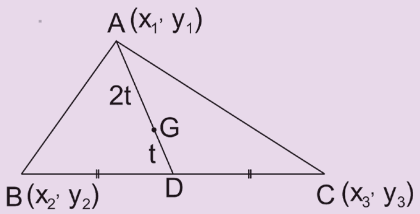
Sıra Sizde

Analitik düzlemde iki noktasının koordinatları $A(-3,4)$ ve $C(5,2)$ olan ABCD dikdörtgeninde B ve D noktalarının koordinatlarının apsisleri toplamını bulunuz.

Bir Üçgenin Ağırlık Merkezinin Koordinatları

Buluyorum

Şekildeki analitik düzlemde $t \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\widehat{ABC}$ 'nin ağırlık merkezinin koordinatları,



$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ve $C(x_3, y_3)$ verilsin. $[BC]$'nın orta noktası

$D\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$ ve

$\widehat{ABC}$ 'nin ağırlık merkezi $G(x_0, y_0)$ olmak üzere

$$G(x_0, y_0) = G\left(\frac{x_1 + k\cdot\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)}{k+1}, \frac{y_1 + k\cdot\left(\frac{y_2+y_3}{2}\right)}{k+1}\right)$$ ifadesinde

$\frac{|AG|}{|GD|} = \frac{2t}{t} = 2$ olduğundan $k = 2$ değeri yerine yazılırsa

$$G\left(\frac{x_1 + 2\cdot\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)}{2+1}, \frac{y_1 + 2\cdot\left(\frac{y_2+y_3}{2}\right)}{2+1}\right) = G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$ olur.

Örnek 18

Analitik düzlemde köşe koordinatları $A(-3, 0)$, $B(1, 2)$ ve $C(5, 1)$ olan $\widehat{ABC}$ 'nin ağırlık merkezinin koordinatlarını bulunuz.

Çözüm

$\widehat{ABC}$ 'nin ağırlık merkezi $G(x_0, y_0)$ olmak üzere $\widehat{ABC}$ 'nin köşe noktalarının koordinatları;

$A(-3, 0) = A(x_1, y_1)$, $B(1, 2) = B(x_2, y_2)$, $C(5, 1) = C(x_3, y_3)$ alınıp

$G(x_0, y_0) = G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$G(x_0, y_0) = G\left(\frac{-3+1+5}{3}, \frac{0+2+1}{3}\right) = G(1, 1)$ olur.

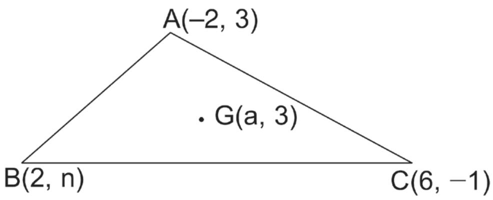
Örnek 19

$a, n \in \mathbb{R}$ olmak üzere analitik düzlemde köşe koordinatları $A(-2, 3)$, $B(2, n)$, $C(6, -1)$ ve ağırlık merkezinin koordinatları $G(a, 3)$ olan $\widehat{ABC}$ için $|AG|$'nun kaç birim olduğunu bulunuz.

Çözüm

Verilen koordinatlar şekildeki gibi yerleştirilsin.
$A(-2, 3) = A(x_1, y_1)$, $B(2, n) = B(x_2, y_2)$, $C(6, -1) = C(x_3, y_3)$ ve ağırlık merkezinin koordinatları

$G(a, 3) = G(x_0, y_0)$ alınıp $G(x_0, y_0) = G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ eşitliğinde yerine yazılırsa



$(a, 3) = \left(\frac{-2+2+6}{3}, \frac{3+n+(-1)}{3}\right) \Rightarrow a = \frac{6}{3} = 2$ bulunur.

Buradan

$A = (-2, 3)$ ve $G(2, 3)$ noktaları arasındaki uzaklık,

$|AG| = \sqrt{(-2-2)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{16} = 4$ olur.

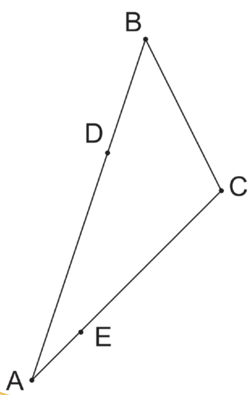
Sıra Sizde

$\widehat{ABC}$'nin köşelerinin koordinatları $A(-2, 5)$, $B(4, 1)$ ve $C(2, 3)$ biçimindedir. G noktası $\widehat{ABC}$'nin ağırlık merkezi olduğuna göre G noktasının koordinatlarını bulunuz.

ALIŞTIRMALAR

1. Analitik düzlemde $A(1, -2)$, $B(6, 8)$ noktaları veriliyor. $[AB]$'nı $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{1}{4}$ oranında içten bölen C noktasının koordinatlarını bulunuz.

2.



Analitik düzlemde $A(-1, -3)$, $B(2, 6)$ ve $C(4, 2)$ noktalarını köşe kabul eden $\widehat{ABC}$'nde $|AD| = 2 \cdot |BD|$ ve $|AC| = 5 \cdot |AE|$ şartını sağlayan D ve E noktaları için $|DE|$'nun kaç birim olduğunu bulunuz.

3. Analitik düzlemde $A(-3, 2)$, $B(1, -2)$ ve $C(-4, 1)$ noktalarını köşe kabul eden $\widehat{ABC}$'nin $[AB]$'na ait kenarortay uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.

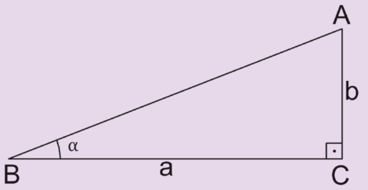
4. Analitik düzlemde ABC üçgeninin köşeleri $A(1, b)$, $B(a, -5)$, $C(-2, -3)$ ve ağırlık merkezi $G(2, 4)$ olduğuna göre $a \cdot b$ ifadesinin değerini bulunuz.

5. Analitik düzlemde ABC üçgeninin bir köşesi $A(3, 1)$ ve ağırlık merkezi $G(1, 5)$'tir. Buna göre üçgenin A köşesinden $[BC]$'na çizilen kenarortay uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.

11.2.1.3. Analitik Düzlemde Doğrular

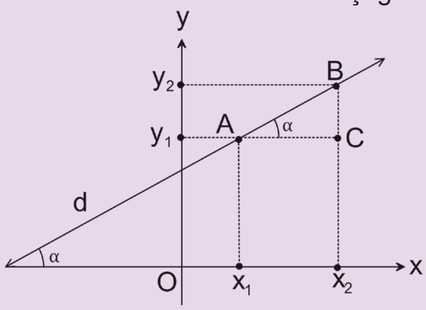
Buluyorum

Bir doğrunun x ekseni ile pozitif yönde yaptığı açıya **eğim açısı** denir. Bu açının ölçüsü α olmak üzere $\tan\alpha$ değerine **doğrunun eğimi** denir.



$$\tan\alpha = \frac{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}} = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{b}{a} \text{ olur.}$$

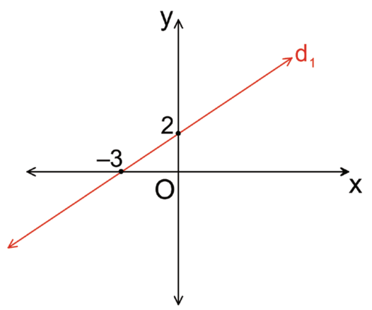
Bu durum analitik düzlemde aşağıdaki gibi gösterilir.

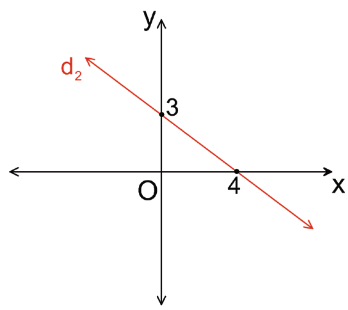


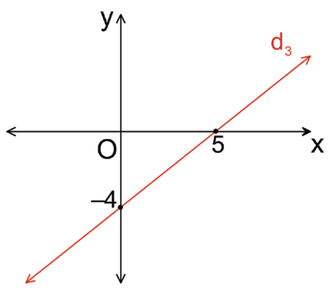
Şekildeki d doğrusunun x ekseni ile pozitif yönde yaptığı açının tanjant değeri d doğrusunun eğimi olup $\tan\alpha = \dfrac{|BC|}{|AC|} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ olur ve bu değer d doğrusunun eğimidir.
Eğim genellikle $m, m_1, m_2, \ldots$ sembolleriyle gösterilir.

Örnek 20

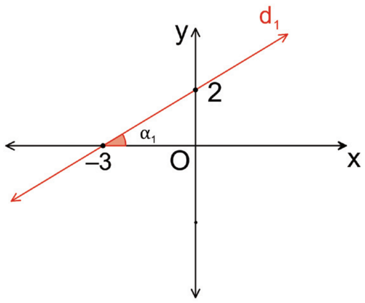
Aşağıdaki analitik düzlemde verilen doğruların eğimlerini bulunuz.

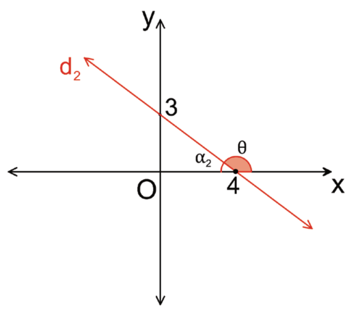


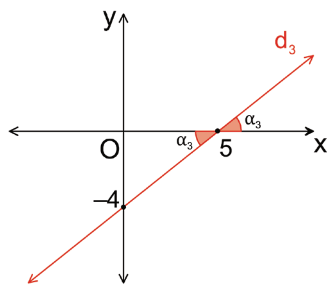




Çözüm







d_1 doğrusunun x ekseni ile pozitif yönde yaptığı dar açı α_1 olup eğim $= \tan\alpha_1 = \dfrac{2}{3}$ olur.

d_2 doğrusunun x ekseni ile pozitif yönde yaptığı geniş açı θ olup $\tan\theta = \tan(180 - \alpha_2) = -\tan\alpha_2$, eğim $= \tan\theta = -\tan\alpha_2 = -\dfrac{3}{4}$ olur.

d_3 doğrusunun x ekseni ile pozitif yönde yaptığı dar açı α_3 olup eğim $= \tan\alpha_3 = \dfrac{4}{5}$ olur.

Örnek 21

15 Temmuz Şehitlerini Anma Programı için Adana 5 Ocak Meydanı'na platform kurulacaktır. Bu platform için hazırlanan 10 basamaklı merdivene turkuaz halı döşenecektir. Merdivenin özellikleri aşağıdaki gibidir.

I. Merdivenin her bir basamağının yüksekliği 15 cm'dir.

II. Merdivenin bulunduğu düzleme göre eğimi $\frac{3}{4}$ 'tür.

III. Merdivenin eni 100 cm'dir.

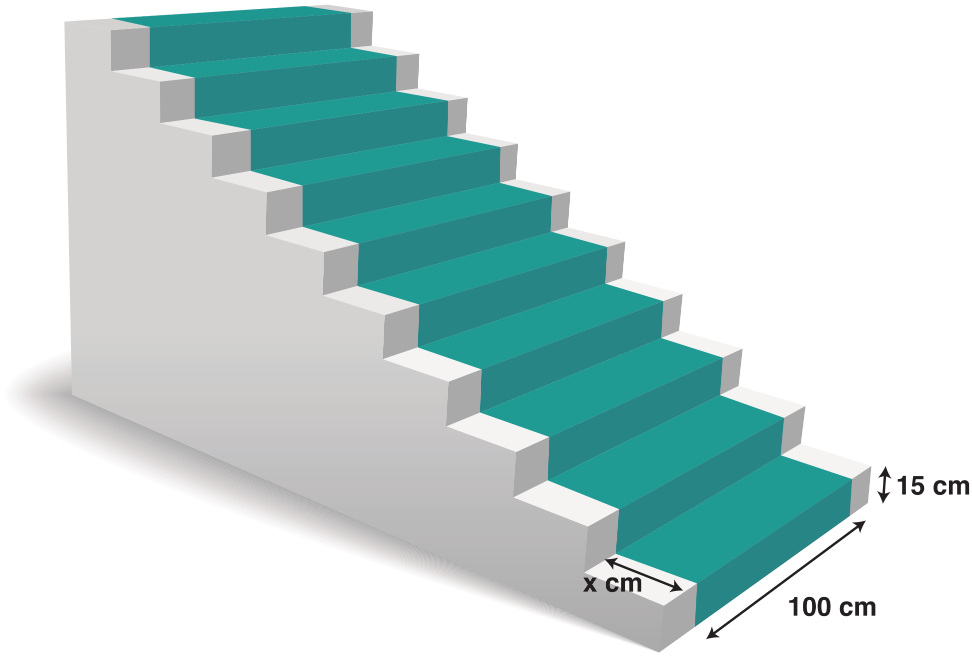
Bu bilgilere göre aşağıdaki soruları cevaplandırınız (Döşenecek halının kalınlığı dikkate alınmayacaktır.).

a) Kaç metrekare halı döşeneceğini bulunuz.

b) Basamak yüksekliği aynı kalmak şartı ile merdivenin eğimi $\frac{3}{5}$ alınsaydı kaç metrekare fazla halıya ihtiyaç duyulacağını bulunuz.

Çözüm

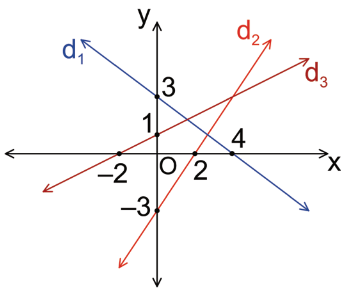
Platform için hazırlanan 10 basamaklı merdiven aşağıdaki gibi modellenebilir.



a) Basamağın yüksekliği 15 cm ve eğimi $\frac{3}{4}$ olup merdiven basamağının eninin uzunluğu x olarak alınırsa $\frac{15}{x}=\frac{3}{4}\Rightarrow 3x=60\Rightarrow x=20$ cm bulunur. Merdiven 10 basamaklı olduğundan 10 tane basamak ve 10 tane de basamak yüksekliği olacağından döşenecek halının boyu, $10\cdot 15+10\cdot 20=150+200=350$ cm'dir. Halının eni 100 cm olduğundan döşenecek halının alanı, $100\cdot 350=35\,000\ \text{cm}^2=3{,}5\ \text{m}^2$ olur.

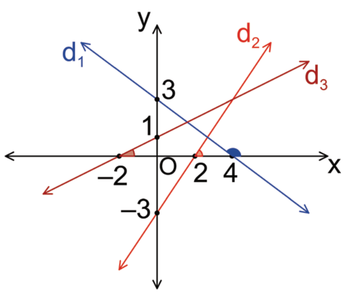
b) Basamağın yüksekliği 15 cm ve eğimi $\frac{3}{5}$ olup merdiven basamağının eninin uzunluğu x olarak alınırsa $\frac{15}{x}=\frac{3}{5}\Rightarrow 3x=75\Rightarrow x=25$ cm bulunur. Merdiven 10 basamaklı olduğundan 10 tane basamak ve 10 tane de basamak yüksekliği olacağından döşenecek halının boyu, $10\cdot 15+10\cdot 25=150+250=400$ cm'dir. Halının eni 100 cm olduğundan döşenecek halının alanı $100\cdot 400=40\,000\ \text{cm}^2=4\ \text{m}^2$ olur. Buradan $4-3{,}5=0{,}5\ \text{m}^2$ halıya ihtiyaç olur.

Örnek 22



Yandaki analitik düzlemde verilen d_1, d_2 ve d_3 doğrularının eğimleri sırasıyla m_1, m_2, m_3 olmak üzere $4m_1+8m_2-4m_3$ değerini bulunuz.

Çözüm



Yandaki şekilde d_1 doğrusunun x ekseni ile pozitif yönde yaptığı geniş açı kullanılarak eğimi $m_1=-\frac{3}{4}$, d_2 doğrusunun x ekseni ile pozitif yönde yaptığı dar açı kullanılarak eğimi $m_2=\frac{3}{2}$ ve d_3 doğrusunun x ekseni ile pozitif yönde yaptığı dar açı kullanılarak eğimi $m_3=\frac{1}{2}$ bulunur. Bulunan bu değerler $4m_1+8m_2-4m_3$ ifadesinde yerine yazılırsa

$\cancel{4}\cdot\frac{-3}{\cancel{4}}+\cancel{8}\cdot\frac{3}{\cancel{2}}-\cancel{4}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}=-3+12-2=7$ olur.

Örnek 23

Analitik düzlemde $A(2,\ -3)$, $B(1,\ 4)$ noktalarından geçen doğrunun eğimini bulunuz.

Çözüm

$A(2,\ -3)=A(x_1,\ y_1)$, $B(1,\ 4)=B(x_2,\ y_2)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi,

$\tan\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4-(-3)}{1-2}=\frac{7}{-1}=-7$ olur.

Sıra Sizde

Analitik düzlemde $A(-5,\ -7)$, $B(5,\ 7)$ noktalarından geçen doğrunun eğimini bulunuz.

Örnek 24

Analitik düzlemde $A(-4, 1)$, $B(2, n)$ noktalarından geçen doğru, x ekseni ile pozitif yönde 45° lik açı yaptığına göre n gerçek sayısını bulunuz.

Çözüm

$A(-4, 1) = A(x_1, y_1)$, $B(2, n) = B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğru, x ekseni ile pozitif yönde 45° lik açı yaptığından eğimi,

$$\underbrace{\tan 45^\circ}_{1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{n-1}{2-(-4)} \Rightarrow \frac{n-1}{6} = 1 \Rightarrow n = 7 \text{ olur.}$$

Örnek 25

Analitik düzlemde $A(3, 2)$, $B(4, 1)$ noktalarından geçen doğrunun x ekseni ile pozitif yönde yaptığı açının kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm

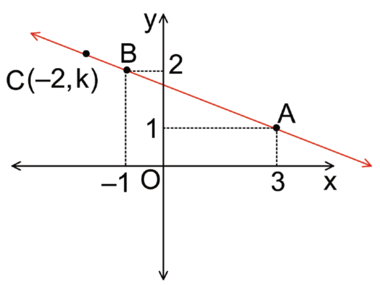
$A(3, 2) = A(x_1, y_1)$, $B(4, 1) = B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi,

$\tan\alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{1-2}{4-3} = \dfrac{-1}{1} = -1$ olup $\tan 135^\circ = -\tan 45^\circ = -1$ bulunur. Buradan doğrunun x ekseni ile pozitif yönde yaptığı açı 135° olur.

Örnek 26

Analitik düzlemde $A(3, 1)$, $B(-1, 2)$ ve $C(-2, k)$ noktaları aynı doğru üzerinde olduğuna göre k gerçek sayısını bulunuz.

Çözüm



$A(3, 1) = A(x_1, y_1)$, $B(-1, 2) = B(x_2, y_2)$ ve $C(-2, k) = C(x_3, y_3)$ noktaları aynı doğru üzerinde olduğundan, A ve B noktalarından geçen doğru ile B ve C noktalarından geçen doğru aynı olduğundan eğimleri birbirine eşittir. Buradan A ve B noktalarından geçen doğrunun eğimi,

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-1}{-1-3} = \frac{1}{-4},$$

B ve C noktalarından geçen doğrunun eğimi,

$$m_{BC} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{k-2}{-2-(-1)} = \frac{k-2}{-1} \text{ olup}$$

$$m_{AB} = m_{BC} \Rightarrow \frac{1}{-4} = \frac{k-2}{-1} \Rightarrow -4k + 8 = -1 \Rightarrow k = \frac{9}{4} \text{ olur.}$$

Sıra Sizde

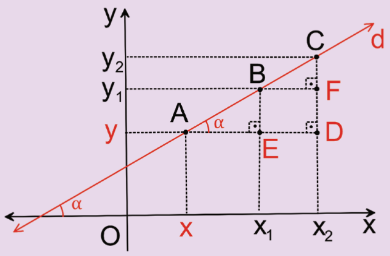
Analitik düzlemde $A(a, -2)$, $B(-3, 1)$ ve $C(3, -4)$ noktaları aynı doğru üzerinde olduğuna göre a gerçek sayısını bulunuz.

Analitik Düzlemde Bir Doğrunun Denklemi

İki Noktası Bilinen Doğrunun Denklemi

Buluyorum

Analitik düzlemde $B(x_1, y_1)$ ve $C(x_2, y_2)$ noktalarından geçen d doğrusunun denklemi; d doğrusu üzerindeki herhangi bir nokta $A(x, y)$ olmak üzere A, B ve C noktaları aynı doğru üzerinde olduğundan $m_{AB} = m_{BC}$ olur.



$m_{AB} = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$ ve $m_{BC} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ olduğundan

$\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ bulunur.

Örnek 27

Analitik düzlemde $B(-2, 4)$, $C(1, -2)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

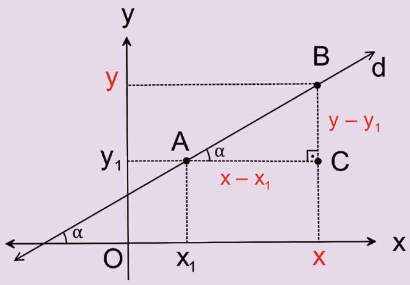
Çözüm

$B(-2, 4) = B(x_1, y_1)$, $C(1, -2) = C(x_2, y_2)$ olup C ve B noktaları ile aynı doğru üzerinde herhangi bir $A(x, y)$ noktası alınıp $\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ eşitliğinde yerine yazılırsa bu noktalardan geçen doğrunun denklemi $\dfrac{y-4}{x-(-2)} = \dfrac{4-(-2)}{-2-1} \Rightarrow \dfrac{y-4}{x+2} = \dfrac{6}{-3} \Rightarrow -3y + \cancel{12} = 6x + \cancel{12} \Rightarrow y = -2x$ olur.

Eğimi ve Bir Noktası Bilinen Doğrunun Denklemi

Buluyorum

Analitik düzlemde eğimi m ve $A(x_1, y_1)$, $B(x, y)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi;



$\tan\alpha = m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$ şeklindedir.

Örnek 28

Analitik düzlemde $A(3, 5)$ noktasından geçen ve eğimi $m = -2$ olan doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm

Analitik düzlemde $A(3, 5) = A(x_1, y_1)$ noktasından geçen ve eğimi $m = -2$ olan doğrunun denklemi,
$y - y_1 = m \cdot (x - x_1) \Rightarrow y - 5 = -2 \cdot (x - 3) \Rightarrow y = -2x + 11$ olur.

İpucu

Denklemi $y = mx + n$ şeklinde olan doğrunun eğimi m'dir.
Denklemi $ax + by + c = 0$ olan doğrunun eğimi $-\dfrac{a}{b}$'dir.

Örnek 29

Aşağıda verilen doğru denklemlerinin eğimlerini bulunuz.

a) $y = 3x - 4$ **b)** $y = \dfrac{x}{3} + 7$ **c)** $3y - 5x + 1 = 0$

Çözüm

a) $y = 3x - 4$ denkleminin belirttiği doğrunun eğimi 3 olur.

b) $y = \dfrac{x}{3} + 7$ denkleminin belirttiği doğrunun eğimi $\dfrac{1}{3}$ olur.

c) $3y - 5x + 1 = 0 \Rightarrow 3y = 5x - 1 \Rightarrow y = \dfrac{5}{3}x - \dfrac{1}{3}$ denkleminin belirttiği doğrunun eğimi $\dfrac{5}{3}$ olur.

Sıra Sizde

Aşağıda verilen doğru denklemlerinin eğimlerini bulunuz.

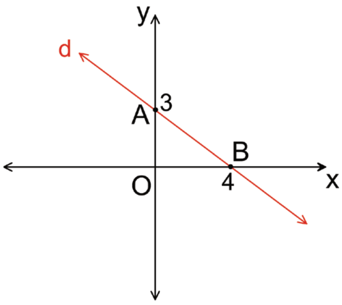
a) $3y = -5x + 21$

b) $y - 5x = 3$

c) $12x - 3y + 7 = 0$

ç) $9x - \frac{5y}{6} + 1 = 0$

Örnek 30

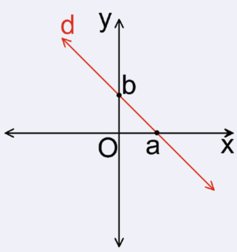


Yandaki analitik düzlemde şekli verilen $A(0, 3)$ ve $B(4, 0)$ noktalarından geçen d doğrusunun denklemini bulunuz.

Çözüm

Şekildeki d doğrusu $A(0, 3)$ ve $B(4, 0)$ noktalarından geçmektedir.
$A(0, 3) = A(x_1, y_1)$, $B(4, 0) = B(x_2, y_2)$ olup bu noktalarından geçen doğrunun eğimi m olsun. Buradan
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-3}{4-0} = \frac{-3}{4}$ bulunur.
Doğru üzerindeki $A(0, 3)$ noktası ve $m = \frac{-3}{4}$ değerleri, eğimi ve bir noktası bilinen doğru denkleminde yerine yazılırsa $y - y_1 = m \cdot (x - x_1) \Rightarrow y - 3 = \frac{-3}{4} \cdot (x - 0) \Rightarrow y - 3 = \frac{-3}{4}x \Rightarrow y = \frac{-3}{4}x + 3$ olur.

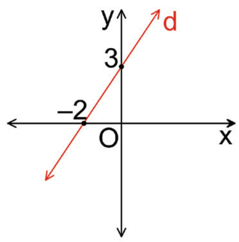
Bilgi



Yandaki şekilde verilen analitik düzlemde eksenleri $(a, 0)$ ve $(0, b)$ noktalarında kesen d doğrusunun denklemi,
$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ olur.

Örnek 31

Aşağıdaki analitik düzlemde grafiği verilen d doğrusunun denklemini bulunuz.



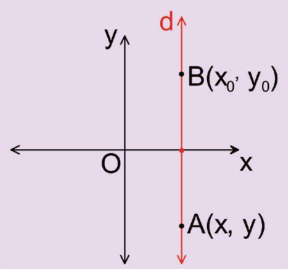
Çözüm

Grafikteki d doğrusu analitik düzlemde x eksenini apsisi -2 olan noktada ve y eksenini ordinatı 3 olan noktada kestiğinden $a=-2$ ve $b=3$ olmak üzere d doğrusunun denklemi,

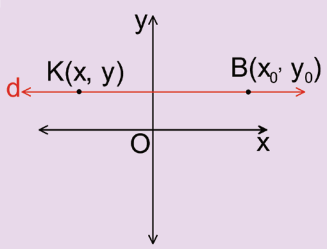
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \Rightarrow \underset{(3)}{\frac{x}{-2}}+\underset{(-2)}{\frac{y}{3}}=\underset{(-6)}{\frac{1}{1}} \Rightarrow 3x-2y=-6 \Rightarrow 3x-2y+6=0 \text{ olur.}$$

Eksenlere Paralel Olan Doğrular ile Orijinden Geçen Doğruların Denklemleri

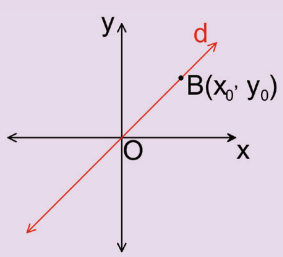
Buluyorum



y eksenine paralel bir doğrunun üzerinde alınan her noktanın y eksenine olan uzaklıkları eşittir.
Yandaki grafikte y eksenine paralel olan d doğrusu üzerinde bulunan herhangi iki nokta $A(x, y)$ ve $B(x_0, y_0)$ olmak üzere AB doğrusu y eksenine paralel olduğundan eğim açısının ölçüsü 90° dir. $\tan 90^\circ$ tanımsızdır. Dolayısıyla y eksenine paralel doğruların eğimleri tanımsızdır. $A(x, y)$ ve $B(x_0, y_0)$ noktaları için eğim $\frac{y-y_0}{x-x_0}$ olup tanımsız olacağından $x-x_0=0$ olmalıdır. O hâlde y eksenine paralel olan doğrunun denklemi $x=x_0$ olur. Ayrıca $x_0=0 \Rightarrow x=0$ olup $x=0$, y ekseninin denklemidir.



x eksenine paralel bir doğrunun üzerinde alınan her noktanın x eksenine olan uzaklıkları eşittir.
Yandaki grafikte x eksenine paralel olan d doğrusu üzerinde bulunan herhangi iki nokta $K(x, y)$ ve $B(x_0, y_0)$ olmak üzere KB doğrusu x eksenine paralel olduğundan eğim açısının ölçüsü 0° dir. $\tan 0^\circ = 0$ olur. $K(x, y)$ ve $B(x_0, y_0)$ noktaları için eğim $\frac{y-y_0}{x-x_0}=0 \Rightarrow y=y_0$ bulunur. O hâlde x eksenine paralel olan doğrunun denklemi $y=y_0$ olur. Ayrıca $y_0=0 \Rightarrow y=0$ olup $y=0$, x ekseninin denklemidir.



$B(x_0, y_0)$ ve $O(0, 0)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi,

$m=\frac{y_0-0}{x_0-0}=\frac{y_0}{x_0}$ olur. $B(x_0, y_0)$ ve $m=\frac{y_0}{x_0}$ değerleri

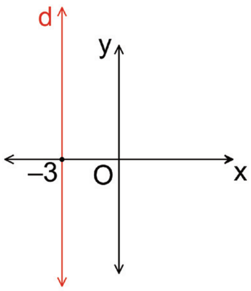
eğimi ve bir noktası bilinen doğru denkleminde yerine yazılırsa

$y-0=\frac{y_0}{x_0}\cdot(x-0) \Rightarrow y=\frac{y_0}{x_0}\cdot x$ elde edilir.

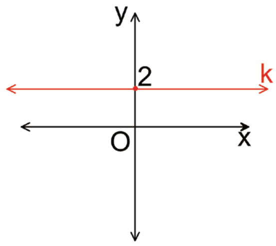
Örnek 32

Aşağıda analitik düzlemde grafikleri verilen doğruların denklemlerini yazınız.

a)



b)

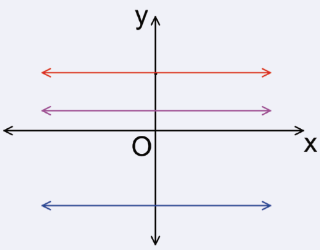


Çözüm

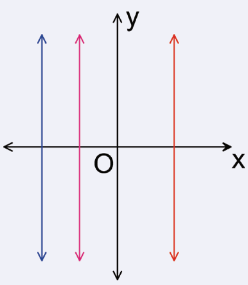
a) d doğrusu üzerinde alınan herhangi bir (x, y) için $x = -3$ olmalıdır. Analitik düzlemde grafiği verilen d doğrusu üzerinde alınan tüm noktaların apsislerinin y eksenine olan uzaklıkları eşit ve 3 birim olacağından d doğrusunun denklemi $x = -3$ olur. $x = -3$ doğrusunun grafiği y eksenine paralel olup y ekseni boyunca alınan $\forall a \in \mathbb{R}$ için x eksenindeki karşılığı -3 olur.

b) k doğrusu üzerinde alınan herhangi bir (x, y) için $y = 2$ olmalıdır. Analitik düzlemde grafiği verilen k doğrusu üzerinde alınan tüm noktaların ordinatlarının x eksenine olan uzaklıkları eşit ve 2 birim olacağından k doğrusunun denklemi $y = 2$ olur. $y = 2$ doğrusunun grafiği x eksenine paralel olup x ekseni boyunca alınan $\forall a \in \mathbb{R}$ için y eksenindeki karşılığı 2 olur.

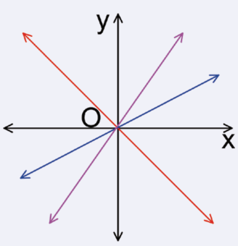
Bilgi



$ax + by + c = 0$ biçimindeki doğru denkleminde $a = 0$ ve $b \neq 0$ için
$0 \cdot x + by + c = 0 \Rightarrow by = -c \Rightarrow y = -\frac{c}{b}$ olup doğru x eksenine paraleldir.



$ax + by + c = 0$ biçimindeki doğru denkleminde $b = 0$ ve $a \neq 0$ için
$ax + 0 \cdot y + c = 0 \Rightarrow ax = -c \Rightarrow x = -\frac{c}{a}$ olup doğru y eksenine paraleldir.



$ax + by + c = 0$ biçimindeki doğru denkleminde $c = 0$ ve $b \neq 0$ için
$ax + by + 0 = 0 \Rightarrow by = -ax \Rightarrow y = -\frac{ax}{b}$ olup doğru, orijinden geçer.

Örnek 33

$m \in \mathbb{R}$ olmak üzere d: $(m-2)x+(m+3)y-(2m+4)=0$ biçiminde d doğrusunun denklemi verilmiştir.
a) d doğrusunun x eksenine paralel olması için m kaç olmalıdır?
b) d doğrusunun orijinden geçmesi için doğrunun eğimini bulunuz.

Çözüm

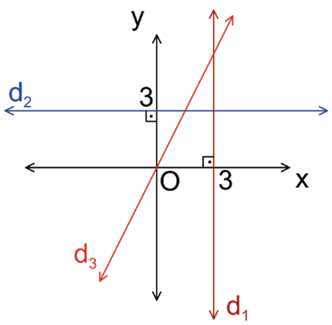
a) d doğrusunun x eksenine paralel olması için x'in katsayısı olan $m-2=0$ ve $m+3 \neq 0$ olmalıdır. Bu durumda $m-2=0 \Rightarrow m=2$ olur.
b) d doğrusunun orijinden geçmesi için $-(2m+4)=0$ ve $m-2 \neq 0$ olmalıdır. Bu durumda $-(2m+4)=0 \Rightarrow 2m+4=0 \Rightarrow m=-2$ olur. Buradan d doğrusunun denkleminde m yerine -2 yazılırsa doğru denklemi $(-2-2)x+(-2+3)y-(2\cdot(-2)+4)=0 \Rightarrow -4x+y=0 \Rightarrow y=4x$ olup eğim 4 olur.

Örnek 34

Aşağıdaki denklemleri verilen doğruların grafiklerini aynı analitik düzlemde gösteriniz.
a) d_1: $2x-6=0$ **b)** d_2: $-y+3=0$ **c)** d_3: $4x-2y=0$

Çözüm

a) d_1: $2x-6=0$ denkleminde $2x-6=0 \Rightarrow x=3$ olup doğru, y eksenine paraleldir.
b) d_2: $-y+3=0$ denkleminde $-y+3=0 \Rightarrow y=3$ olup doğru, x eksenine paraleldir.
c) d_3: $4x-2y=0$ denkleminde $4x-2y=0 \Rightarrow y=2x$ olup eğimi 2 olan ve orijinden geçen doğru belirtir.
d_1, d_2 ve d_3 doğrularına ait grafikler analitik düzlemde aşağıdaki gibidir.



Sıra Sizde

Aşağıdaki denklemleri verilen doğruların grafiklerini aynı analitik düzlemde gösteriniz.

a) d_1: $5x+15=0$

b) d_2: $2y-5=0$

c) d_3: $3x-5y=0$

İki Doğrunun Birbirine Göre Durumları

Buluyorum

$a, b, c, d, e, k \in \mathbb{R}$ olmak üzere d_1: $ax + by + c = 0$ ve d_2: $dx + ey + k = 0$ doğruları veriliyor. Buna göre a, b, c, d, e, k katsayılarının değerlerine göre doğruların birbirlerine göre durumu dinamik matematik yazılımı ile aşağıdaki gibi gösterilebilir. Bunun için dinamik matematik yazılımını açınız.

Alttaki giriş bölümüne $ax + by + c = 0$ yazınız ve “ENTER” tuşuna basınız. Ekranda beliren kutuda “Sürgüler oluştursun mu?” sekmesine tıklayınız.

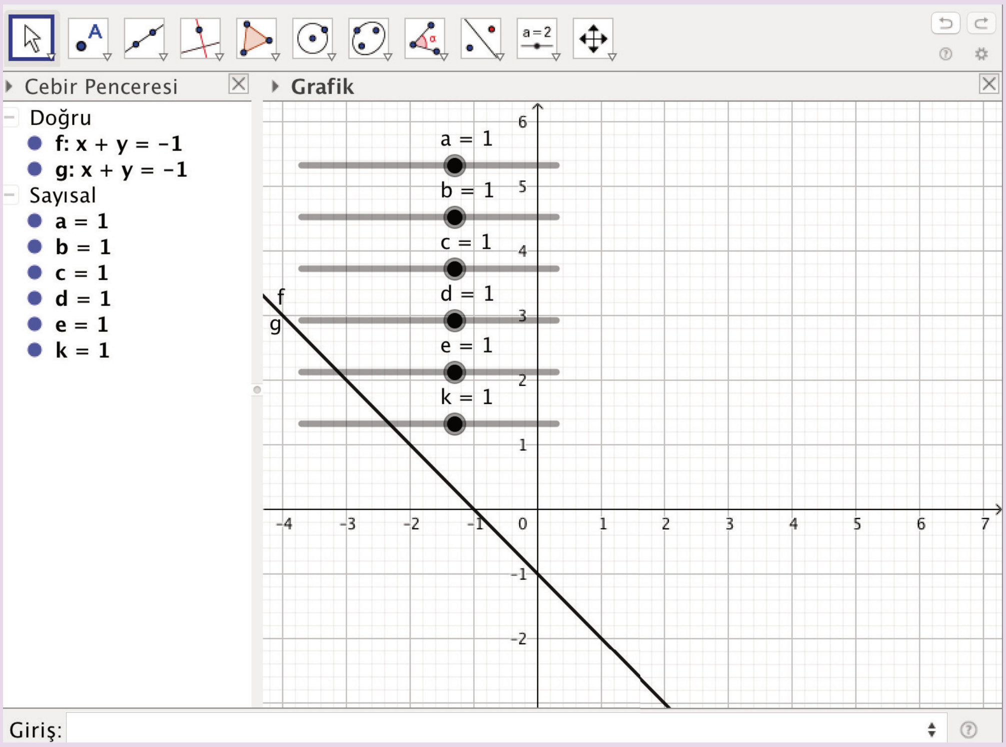
Böylece ekranda sürgü değerleri 1 iken $ax + by + c = 0$ doğru grafiği görülür. Yine aynı şekilde giriş bölümüne $dx + ey + k = 0$ yazarak yine sürgüler oluşturunuz.

Bu sayede ekranda sürgü değerleri 1 iken $dx + ey + k = 0$ doğru grafiği oluşur.

I. Sürgü değerleri $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{k}$ orantısını sağlarken d_1 ile d_2 doğrularının çakışık olduğu (aynı doğru olduğu) görülür.

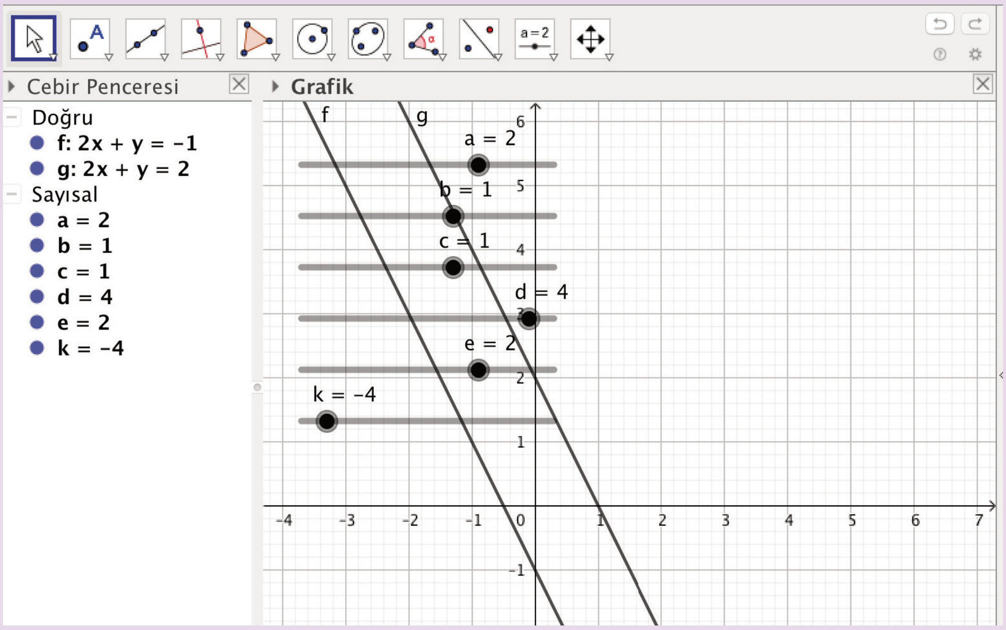
Aşağıdaki görselde bu şartı sağlayan durumlardan biri, sürgü değerleri 1 seçilerek verilmiştir. Doğru denklemlerinin ortak çözümü sonsuz elemanlıdır.

Denklem sistemini sağlayan sonsuz sayıdaki noktalar doğrusaldır. Doğrulardan birinin grafiğini oluşturan tüm noktalar çözüm kümesidir.



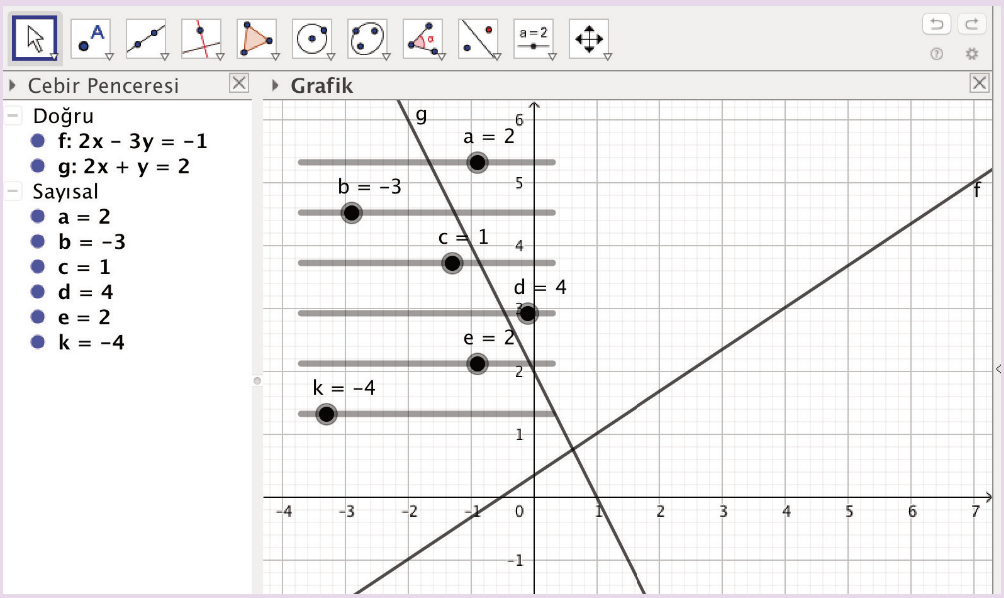
Siz de $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{k}$ şartını sağlayan başka sürgü değerleri için doğruların durumlarını inceleyiniz.

II. $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{k}$ şartını sağlayan durumlardan biri olan $a = 2,\ b = 1,\ c = 1,\ d = 4,\ e = 2,\ k = -4$ sürgü değerlerinin seçilmesi durumunda d_1 ile d_2 doğruları birbirine paralel olur. Bu doğruların hiçbir ortak noktası olmaz. Dolayısıyla $d_1 \neq d_2$ ve $d_1 \parallel d_2 \Rightarrow ÇK = \varnothing$ olur. Ayrıca d_1 ve d_2 doğrularının eğimleri sırasıyla m_1 ve m_2 olmak üzere $d_1 \parallel d_2 \Rightarrow m_1 = m_2$ olup bu koşula **paralellik koşulu** denir.



III. $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$ şartını sağlayan sürgü değerleri kullanılması durumunda

$(a = 2,\ b = -3,\ c = 1,\ d = 4,\ e = 2,\ k = -4)$ d_1 ile d_2 doğruları bir tek noktada kesişir.



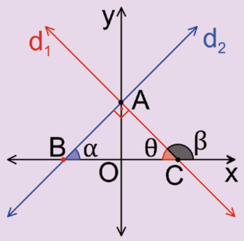
Bu kesim noktası,

$$\left.\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ dx + ey + k &= 0 \end{aligned}\right\}$$ denklem sistemlerinin ortak çözümlerinden elde edilen $(x,\ y)$ ikilisidir.

İki Doğrunun Birbirine Dik Olma Durumu

Buluyorum

Aşağıdaki şekilde $d_1 \perp d_2$ ve d_1, d_2 doğrularının x ekseni ile pozitif yönde yaptıkları açılar sırasıyla β ve α olmak üzere bu doğruların eğimleri sırasıyla $m_1 = \tan\beta$ ve $m_2 = \tan\alpha$ olsun. Buradan



$\tan\theta = \dfrac{|AB|}{|AC|}$, $\tan\alpha = \dfrac{|AC|}{|AB|}$ ve $\theta + \beta = 180^\circ \Rightarrow \tan\beta = -\tan\theta$ olduğundan

$\tan\beta \cdot \tan\alpha = -\tan\theta \cdot \tan\alpha$ ... (I)

$-\tan\theta \cdot \tan\alpha = -\dfrac{\cancel{|AB|}}{\cancel{|AC|}} \cdot \dfrac{\cancel{|AC|}}{\cancel{|AB|}} = -1$ ... (II)

I ve II den $\tan\beta \cdot \tan\alpha = -1$ olur. Buradan

$d_1 \perp d_2 \Rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$ olup bu koşula **diklik koşulu** denir.

Örnek 35

Analitik düzlemde $3x + 4y - 5 = 0$ ve $x - (k-2)y - 1 = 0$ doğruları birbirine dik olduğuna göre $k \in \mathbb{R}$ ifadesinin değerini bulunuz.

Çözüm

$3x + 4y - 5 = 0$ doğrusunun eğimi $\dfrac{-3}{4}$, $x - (k-2)y - 1 = 0$ doğrusunun eğimi $\dfrac{1}{k-2}$ olur.

İki doğru birbirine dik olduğundan eğimler çarpımı -1'dir.

Buradan $\dfrac{-3}{4} \cdot \dfrac{1}{k-2} = -1 \Rightarrow -4k + 8 = -3 \Rightarrow k = \dfrac{11}{4}$ olur.

Örnek 36

Analitik düzlemde $2x + 4y - 5 = 0$ doğrusu ile $-x - 2y + k = 0$ doğruları kesişmediğine göre $k \in \mathbb{R}$ ifadesinin hangi değeri alamayacağını bulunuz.

Çözüm

$2x + 4y - 5 = 0$ ve $-x - 2y + k = 0$ doğruları kesişmediğinden

$\dfrac{2}{-1} = \dfrac{4}{-2} \neq \dfrac{-5}{k} \Rightarrow -2 \neq \dfrac{-5}{k} \Rightarrow k \neq \dfrac{5}{2}$ olur. Dolayısıyla k değeri $\dfrac{5}{2}$ olamaz.

Örnek 37

Analitik düzlemde $(a+2)x+(b-2)y+6=0$ ve $3x-4y-3=0$ doğruları çakışık olduğuna göre a ve b gerçek sayılarını bulunuz.

Çözüm

$(a+2)x+(b-2)y+6=0$ ve $3x-4y-3=0$ doğruları çakışık olduğundan

$\frac{a+2}{3}=\frac{b-2}{-4}=\frac{6}{-3}$ orantısında $\frac{a+2}{3}=\frac{6}{-3} \Rightarrow -3a-6=18 \Rightarrow -3a=24 \Rightarrow a=-8$,

$\frac{b-2}{-4}=\frac{6}{-3} \Rightarrow -3b+6=-24 \Rightarrow -3b=-30 \Rightarrow b=10$ olur.

» Sıra Sizde

Analitik düzlemde $3x+3y+7=0$ ve $-4x-4y+2k=0$ doğrularından oluşan denklem sisteminin çözüm kümesi boş küme olduğuna göre k gerçek sayısının hangi değeri alamayacağını bulunuz.

Örnek 38

Analitik düzlemde $2x-3y-5=0$ ile $3x+(m+1)y+2=0$ doğruları birbirine paralel olduğuna göre m değerini bulunuz.

Çözüm

$2x-3y-5=0$ doğrusunun eğimi $\frac{2}{3}$, $3x+(m+1)y+2=0$ doğrusunun eğimi $-\frac{3}{m+1}$ olur.

Bu iki doğru birbirine paralel olduğundan eğimler birbirine eşittir.

Buradan $\frac{2}{3}=\frac{-3}{m+1} \Rightarrow 2m+2=-9 \Rightarrow m=\frac{-11}{2}$ olur.

Örnek 39

Analitik düzlemde $3x-y+2=0$ doğrusuna paralel olan ve $A(-1, 4)$ noktasından geçen doğrunun denklemini yazınız.

Çözüm

$3x-y+2=0$ doğrusunun eğimi $m=3$ olup istenen doğru ile $3x-y+2=0$ doğrusu paralel olduğundan bu iki doğrunun eğimleri eşittir. İstenen doğrunun eğimi de 3 olur. Buradan $A(x_1, y_1)=A(-1, 4)$ ve $m=3$ değerleri, bir noktası ve eğimi bilinen doğru denkleminde yerine yazılır. $y-y_1=m(x-x_1)$ ise $y-4=3(x-(-1)) \Rightarrow y=3x+7$ denklemi elde edilir.

Örnek 40

Analitik düzlemde $\sqrt{3}y-x+1=0$, $x-y+3=0$ denklemleri ile verilen doğruların eğim açılarının toplamının kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm

Analitik düzlemde verilen $\sqrt{3}y-x+1=0$ doğrunun eğimi $m=\tan\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ olup doğrunun eğim açısı $\alpha=30^\circ$ olur.
$x-y+3=0$ doğrunun eğimi $m=\tan\beta=1$ olup doğrunun eğim açısı $\beta=45^\circ$ olur.
Buradan $\sqrt{3}y-x+1=0$, $x-y+3=0$ denklemleri ile verilen doğruların eğim açılarının toplamı $\alpha+\beta=30^\circ+45^\circ=75^\circ$ olur.

Örnek 41

Analitik düzlemde $2y+2x+5=0$, $-\sqrt{3}x-y+2=0$ denklemleri ile verilen doğruların eğim açılarının toplamının kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm

Analitik düzlemde verilen $2y+2x+5=0$ doğrusunun eğimi $m=\tan\alpha=-1$ olup doğrunun x ekseni ile yaptığı pozitif yöndeki açı $\alpha=135^\circ$ olur.
$-\sqrt{3}x-y+2=0$ doğrusunun eğimi $m=\tan\beta=-\sqrt{3}$ olup doğrunun x ekseni ile yaptığı pozitif yöndeki açı $\beta=120^\circ$ olur. Buradan $2y+2x+5=0$, $-\sqrt{3}x-y+2=0$ denklemleri ile verilen doğruların eğim açılarının toplamı $\alpha+\beta=135^\circ+120^\circ=255^\circ$ olur.

Örnek 42

Analitik düzlemde $2x+4y+9=0$ doğrusuna dik ve $A(2,3)$ noktasından geçen doğrunun denklemini yazınız.

Çözüm

$2x+4y+9=0$ doğrusunun eğimine m_1 denirse $y=\dfrac{-2x}{4}-\dfrac{9}{4}\Rightarrow m_1=\dfrac{-\cancel{2}}{\cancel{4}}=\dfrac{-1}{2}$ olur. İstenen doğru ile $2x+4y+9=0$ doğrusu dik olduğundan eğimleri çarpımı -1 olmalıdır. İstenen doğrunun eğimine m_2 denirse $m_1\cdot m_2=-1\Rightarrow\dfrac{-1}{2}\cdot m_2=-1\Rightarrow m_2=2$ bulunur. $A(x_1,\ y_1)=A(2,\ 3)$ ve $m_2=2$ değerleri, bir noktası ve eğimi bilinen doğru denkleminde yerine yazılır. Bu durumda $y-y_1=m(x-x_1)$ olduğundan $y-3=2(x-2)\Rightarrow y-3=2x-4\Rightarrow y-2x+1=0$ denklemi elde edilir.

Örnek 43

Analitik düzlemde verilen $x-2y+4=0$ ve $x+y-2=0$ doğrularının kesim noktasının koordinatları toplamını bulunuz.

Çözüm

Analitik düzlemde verilen $x-2y+4=0$ ve $x+y-2=0$ doğrularının kesim noktası, bu doğruların ortak çözümünden elde edilen $(x,\ y)$ ikilisidir.

$$\begin{array}{rl} x-2y+4=0 & /(-1) \\ x+y-2=0 & \\ \hline -x+2y-4=0 & \\ +\quad x+y-2=0 & \\ \hline \end{array}$$

$3y-6=0 \Rightarrow y=2$ olup $y=2$ değeri $x+y-2=0$ doğrusunda yerine yazılırsa $x=0$ olur. Buradan bu doğruların kesim noktası $(x,y)=(0,2)$ bulunur. Kesim noktasının koordinatları toplamı $2+0=2$ olur.

Örnek 44

Analitik düzlemde verilen $x-3y-1=0$ ve $3x+2y-3=0$ doğrularının kesim noktasından geçen $-2x+y-3=0$ doğrusuna paralel olan doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm

Analitik düzlemde verilen $x-3y-1=0$ ve $3x+2y-3=0$ doğrularının kesim noktası, bu doğruların ortak çözümünden elde edilen $(x,\ y)$ ikilisidir.

$$\begin{array}{rl} x-3y-1=0 & /(2) \\ 3x+2y-3=0 & /(3) \\ \hline 2x-6y-2=0 & \\ +\quad 9x+6y-9=0 & \\ \hline \end{array}$$

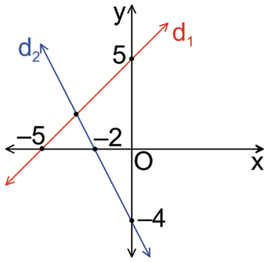
$11x-11=0 \Rightarrow x=1$ olup $x=1$ değeri $x-3y-1=0$ denkleminde yerine yazılırsa $y=0$ olur. Buradan bu doğruların kesim noktası $(x,\ y)=(1,\ 0)$ bulunur. İstenen doğru ile $-2x+y-3=0$ doğrusu paralel olduğundan eğimleri eşit ve 2'dir. $(1,0)$ noktasından geçen ve eğimi 2 olan doğrunun denklemi,

$2=\dfrac{y-0}{x-1} \Rightarrow y=2x-2 \Rightarrow y-2x+2=0$ olur.

Sıra Sizde

Analitik düzlemde $3x-6y+5=0$ doğrusuna paralel ve $A(5,\ -2)$ noktasından geçen doğrunun denklemini yazınız.

Örnek 45



Yandaki analitik düzlemde verilen d_1 ve d_2 doğrularının kesim noktasını bulunuz.

Çözüm

Analitik düzlemde verilen d_1 ve d_2 doğrularının kesim noktasının bulunabilmesi için bu doğruların denklemlerinin bulunup ortak çözüm yapılması gerekir. Buradan d_1 doğrusunun denklemi

$\frac{x}{-5}+\frac{y}{5}=1 \Rightarrow -x+y-5=0$, d_2 doğrusunun denklemi $\frac{x}{-2}+\frac{y}{-4}=1 \Rightarrow 2x+y+4=0$ olur. Bulunan bu doğru denklemlerinin ortak çözümünden

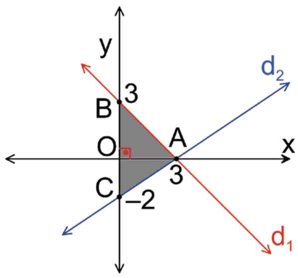
$$\begin{array}{l} -x+y-5=0 \;/ -1 \\ 2x+y+4=0 \\ \hline x-y+5=0 \\ + \; 2x+y+4=0 \\ \hline \end{array}$$

$3x+9=0 \Rightarrow x=-3$ olur. Bu değer $2x+y+4=0$ denkleminde yerine yazılırsa $y=2$ bulunur. Buradan d_1 ve d_2 doğrularının kesim noktası $(-3, 2)$ olur.

Örnek 46

Analitik düzlemde verilen d_1: $x+y-3=0$ ve d_2: $2x-3y-6=0$ doğruları ile y ekseni arasında kalan bölgenin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

Çözüm



Analitik düzlemdeki $2x-3y-6=0$ ve $x+y-3=0$ doğrularının grafikleri yanda verilmiştir. d_1 ve d_2 doğrularının kesim noktası A olsun. Bu doğruların kesim noktası,

$$\begin{array}{l} 2x-3y-6=0 \\ x+y-3=0 \;/3 \\ \hline 2x-3y-6=0 \\ + \; 3x+3y-9=0 \\ \hline \end{array}$$

$5x-15=0 \Rightarrow x=3$ bulunur.

Bu değer $x+y-3=0$ denkleminde yerine yazılırsa $y=0$ olur.

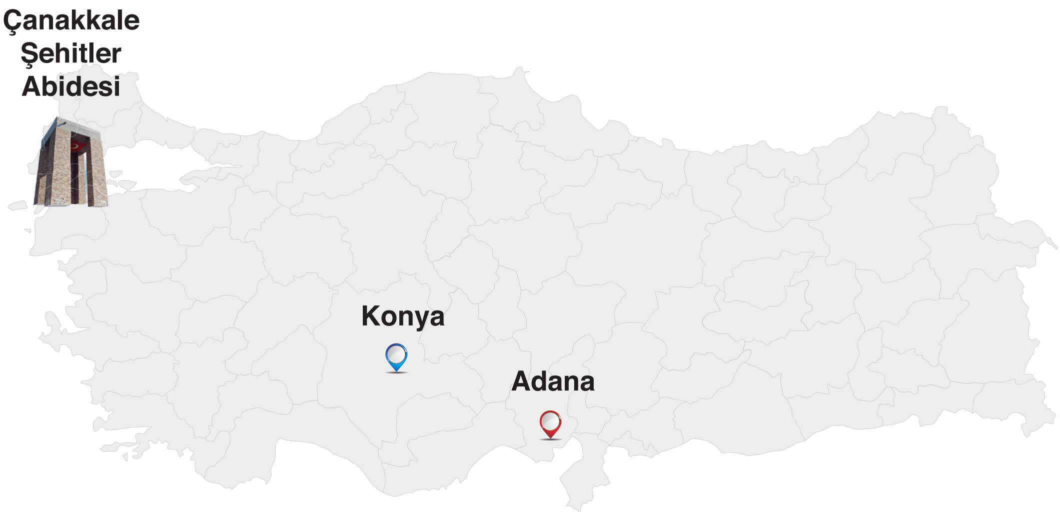
Buradan $A(3, 0)$ bu doğruların kesim noktasıdır.

$x+y-3=0$ doğrusunun y eksenini kestiği nokta B olsun. $x=0$ için $y=3$ olup $B(0, 3)$ olur.

$2x-3y-6=0$ doğrusunun y eksenini kestiği nokta C olsun. $x=0$ için $y=-2$ olup $C(0, -2)$ olur.

d_1 ve d_2 doğrularının kesim noktası $A(3, 0)$ olduğundan $2x-3y-6=0$, $x+y-3=0$ ile y ekseni arasında kalan bölge şekildeki taralı bölgeyle gösterilen yüksekliği $|OA|=3$ ve tabanı $|BC|=5$ olan ABC üçgenidir. Buradan $A(\widehat{ABC})=\frac{3 \cdot 5}{2}=\frac{15}{2}$ birimkare olur.

Örnek 47



Adana 24 Kasım Anadolu Lisesi ile Konya Cumhuriyet Anadolu Lisesi kardeş okullar olarak 18 Mart'ta Çanakkale Şehitlerini Anma Günü dolayısıyla ortak bir gezi programı düzenliyorlar. 24 Kasım Anadolu Lisesi öğretmenleri Çanakkale Şehitler Abidesi'ni orijin kabul ederek harita üzerinde dik koordinat sistemi oluşturuyor. Bu koordinat sisteminin eksenleri birimlere ayrılarak aşağıdaki bilgiler veriliyor.

I. Adana 24 Kasım Anadolu Lisesinin otobüsünün başlangıç konumu analitik düzlemde $A(48,-20)$ noktasıdır.

II. Konya Cumhuriyet Anadolu Lisesi otobüsünün başlangıç konumu analitik düzlemde $K(36,-15)$ noktasıdır.

Yukarıda verilen bilgilere göre aşağıdaki soruları cevaplandırınız.

a) Adana 24 Kasım Anadolu Lisesi otobüsü ile Konya Cumhuriyet Anadolu Lisesi otobüsünün ilk konumlarının Çanakkale Şehitler Abidesi'ne olan uzaklıklarının oranını bulunuz.

b) Adana 24 Kasım Anadolu Lisesi otobüsünün başlangıç konumu ile Çanakkale Şehitler Abidesi'nden geçen doğrunun ve Konya Cumhuriyet Anadolu Lisesi otobüsünün başlangıç konumu ile Çanakkale Şehitler Abidesi'nden geçen doğrunun birbirine göre durumlarını inceleyiniz.

Çözüm

Adana 24 Kasım Anadolu Lisesi otobüsünün ilk konumu $A(48,-20)$, Konya Cumhuriyet Anadolu Lisesi otobüsünün ilk konumu $K(36,-15)$ ve Çanakkale Şehitler Abidesi'nin konumu $O(0,0)$ olmak üzere

a) Adana 24 Kasım Anadolu Lisesi otobüsünün ilk konumu ile Çanakkale Şehitler Abidesi'nin konumu arasındaki uzaklık $|OA|=\sqrt{(48-0)^2+(-20-0)^2}=52$ birim olur.
Konya Cumhuriyet Anadolu Lisesi otobüsünün ilk konumu ile Çanakkale Şehitler Abidesi'nin konumu arasındaki uzaklık $|OK|=\sqrt{(36-0)^2+(-15-0)^2}=39$ birim olur.
Buradan Çanakkale Şehitler Abidesi'ne olan uzaklıklarının oranını $\dfrac{|OA|}{|OK|}=\dfrac{52}{39}=\dfrac{4}{3}$ olur.

b) Adana 24 Kasım Anadolu Lisesi otobüsünün ilk konumu ile Çanakkale Şehitler Abidesi'nden geçen doğrunun denklemi d_1 olmak üzere $\dfrac{y-0}{x-0}=\dfrac{-20-0}{48-0}\Rightarrow\dfrac{y}{x}=\dfrac{\cancel{-20}}{\cancel{48}}\Rightarrow\dfrac{y}{x}=\dfrac{-5}{12}\Rightarrow d_1\!:12y+5x=0$ olur.

Konya Cumhuriyet Anadolu Lisesi otobüsünün ilk konumu ile Çanakkale Şehitler Abidesi'nden geçen doğrunun denklemi d_2 olmak üzere $\dfrac{y-0}{x-0}=\dfrac{-15-0}{36-0}\Rightarrow\dfrac{y}{x}=\dfrac{\cancel{-15}}{\cancel{36}}\Rightarrow\dfrac{y}{x}=\dfrac{-5}{12}\Rightarrow d_2\!:12y+5x=0$ olur.
d_1 ve d_2 doğruları eşit olduğundan bu doğrular çakışık doğrulardır denir.

ALIŞTIRMALAR

1. Analitik düzlemde aşağıda denklemleri verilen doğruların eğimlerini bulunuz.

a) $2x-y+7=0$

b) $-3x+5y-1=0$

c) $-3x+\frac{2y}{5}+11=0$

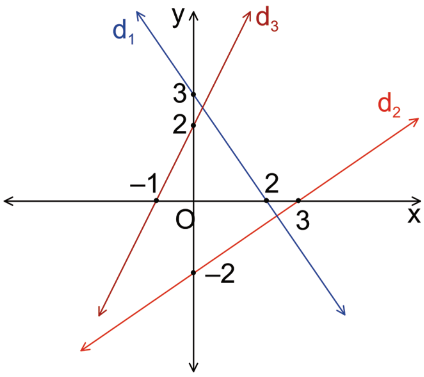
2. Analitik düzlemde verilen $A(7,\ -7)$ ve $B(-5,\ 5)$ noktalarından geçen doğrunun eğimini bulunuz.

3. Analitik düzlemde $(3k-2)x+(-2k+1)y+21=0$ ile belirtilen doğrunun eğim açısı 135° olduğuna göre k ifadesinin değerini bulunuz.

4. Analitik düzlemde $y-\sqrt{3}x+3=0$, $2x-2y+1=0$ ve $y+6=0$ denklemleri ile verilen doğruların eğim açılarının toplamının kaç derece olduğunu bulunuz.

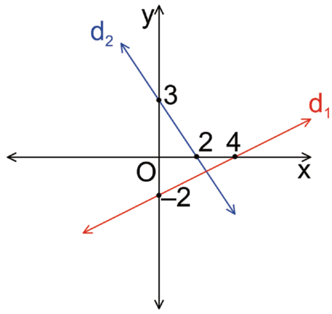
5. Analitik düzlemde verilen $A(-2,\ 4)$, $B(3,\ -1)$ ve $C(k-2,\ -3)$ noktaları aynı doğru üzerinde olduğuna göre k'nin değerini bulunuz.

6.



Yukarıdaki analitik düzlemde grafiği verilen d_1, d_2, d_3 doğrularının eğimleri sırasıyla m_1, m_2, m_3 olduğuna göre $2m_1-m_2+3m_3$ ifadesinin değerini bulunuz.

7.



Yukarıdaki analitik düzlemde grafiği verilen d_1 ve d_2 doğrularının denklemlerini yazıp bu doğruların kesim noktasını bulunuz.

8. Analitik düzlemde $2x-3y+6=0$ doğrusuna paralel olan ve $B(-1,\ 2)$ noktasından geçen doğrunun eksenlerle oluşturduğu üçgensel bölgenin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

9. Analitik düzlemde $3x-y+6=0$ doğrusuna dik olan ve $C(-2,\ 5)$ noktasından geçen doğru denklemini bulunuz.

10. Analitik düzlemde $A(-1,\ 2)$, $B(3,\ -2)$ noktalarının orta noktasından geçen, AB doğru parçasına dik olan doğrunun denklemini bulunuz.

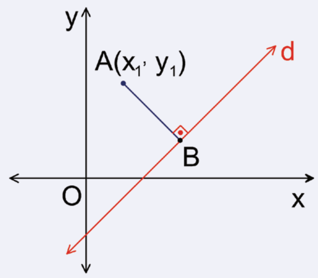
11. Analitik düzlemde $x+y-6=0$ ve $-x+y+2=0$ doğruları ile $x=1$ doğrusu arasında kalan kapalı bölgenin alanını bulunuz.

12. Analitik düzlemde $3x-4y-2=0$ ve $x+3y+1=0$ doğrularının kesim noktasından ve orijinden geçen doğrunun denklemini bulunuz.

11.2.1.4. Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı

Bilgi

Analitik düzlemde verilen $A(x_1,\ y_1)$ noktasının d doğrusuna olan uzaklığı aşağıdaki gibi bulunur.



d doğrusunun denklemi $d: ax + by + c = 0$ olmak üzere A noktasının d doğrusuna uzaklığı

$$|AB| = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ olur.}$$

Örnek 48

Analitik düzlemde verilen $A(2,\ 1)$ noktasının $3x + 4y - 5 = 0$ doğrusuna olan uzaklığının kaç birim olduğunu bulunuz.

Çözüm

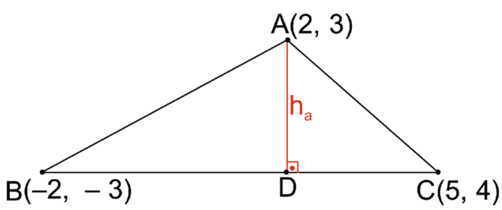
$x_1 = 2$ ve $y_1 = 1$ denirse $A(2,\ 1)$ noktasının $3x + 4y - 5 = 0$ doğrusuna olan uzaklığı,

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{5}{5} = 1 \text{ birim olur.}$$

Örnek 49

Analitik düzlemde verilen $A(2,\ 3)$, $B(-2,\ -3)$ ve $C(5,\ 4)$ noktalarını köşe kabul eden ABC üçgeninin BC kenarına ait yüksekliğin uzunluğunu bulunuz.

Çözüm



Analitik düzlemde verilen $A(2,\ 3)$, $B(-2,\ -3)$ ve $C(5,\ 4)$ noktalarını köşe kabul eden ABC üçgeni şekildeki gibi gösterilirse BC kenarına ait yükseklik, $A(2,\ 3)$ noktasının B ve C noktalarından geçen doğruya olan uzaklığına eşittir. Dolayısıyla B ve C noktalarından geçen doğru denklemi,

$$\frac{4-(-3)}{5-(-2)} = \frac{y-4}{x-5} \Rightarrow \frac{\overset{1}{\cancel{7}}}{\underset{1}{\cancel{7}}} = \frac{y-4}{x-5} \Rightarrow x - 5 = y - 4 \Rightarrow y - x + 1 = 0 \text{ olur.}$$

$A(2,\ 3)$ noktasının $y - x + 1 = 0$ doğrusuna uzaklığı ABC üçgeninin BC kenarına ait yüksekliği h_a olduğundan, $x_1 = 2$ ve $y_1 = 3$ denirse

$$h_a = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|(-1) \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \frac{|-2 + 3 + 1|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \text{ olur.}$$

Örnek 50

Analitik düzlemde verilen $A(1,\ k)$ noktasının $6x+8y-1=0$ doğrusuna olan uzaklığı 3 birim olduğuna göre k'nin alabileceği değerler toplamını bulunuz.

Çözüm

$x_1=1$ ve $y_1=k$ denirse $A(1,\ k)$ noktasının $6x+8y-1=0$ doğrusuna olan uzaklığı 3 birim olduğundan

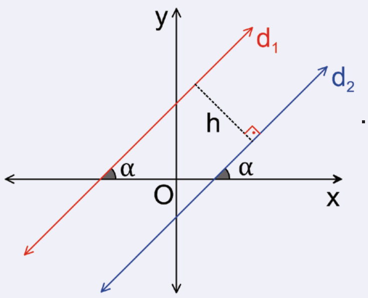
$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|6\cdot 1+8\cdot k-1|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{|5+8\cdot k|}{10}=3\Rightarrow|5+8\cdot k|=30 \text{ olup}$$

$5+8\cdot k=30\Rightarrow k=\frac{25}{8}$ veya $5+8\cdot k=-30\Rightarrow k=\frac{-35}{8}$ bulunur. Buradan k değerlerinin toplamı,

$$\frac{25}{8}+\left(\frac{-35}{8}\right)=\frac{-\cancel{10}}{\cancel{8}}=-\frac{5}{4} \text{ olur.}$$

Paralel İki Doğru Arasındaki Uzaklık

Bilgi



Analitik düzlemde birbirine paralel olan d_1: $ax+by+c_1=0$ ve d_2: $ax+by+c_2=0$ doğruları arasındaki uzaklık h birim olmak üzere

$$h=\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ birim olur.}$$

Örnek 51

Analitik düzlemde verilen d_1: $3x-4y-10=0$ ile d_2: $9x-12y+15=0$ doğruları arasındaki uzaklığın kaç birim olduğunu bulunuz.

Çözüm

d_1: $3x-4y-10=0$ doğrusunun eğimi m_1 ile gösterilirse $y=\frac{3x}{4}-\frac{10}{4}\Rightarrow m_1=\frac{3}{4}$,

d_2: $9x-12y+15=0$ doğrusunun eğimi m_2 ile gösterilirse $y=\frac{\cancel{9}x}{\cancel{12}}+\frac{\cancel{15}}{\cancel{12}}\Rightarrow y=\frac{3x}{4}+\frac{5}{4}\Rightarrow m_2=\frac{3}{4}$

bulunur. Verilen doğruların eğimleri eşit olduğundan doğrular birbirine paraleldir. Analitik düzlemde verilen d_1 doğrusunun denklemi 3 ile çarpılıp d_1: $9x-12y-30=0$ olur. d_1 ve d_2 doğrularının denklemlerindeki x ve y'lerinin katsayıları eşitlenir. Buradan $c_1=-30$, $c_2=15$ ve doğrular arası uzaklık h birim olmak üzere $9x-12y-30=0$ ile $9x-12y+15=0$ doğruları arasındaki uzaklık,

$$h=\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|-30-15|}{\sqrt{9^2+(-12)^2}}=\frac{45}{15}=3 \text{ birim olur.}$$

Örnek 52

Analitik düzlemde ABCD karesinin iki kenarı $2x - 3y + 5 = 0$ ve $-3y + 2x - 11 = 0$ doğruları üzerinde olduğuna göre ABCD karesinin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

Çözüm

$2x - 3y + 5 = 0$ ve $-3y + 2x - 11 = 0$ doğrularının eğimleri birbirine eşit ve $\frac{2}{3}$ dir. $c_1 = 5$, $c_2 = -11$ olup $2x - 3y + 5 = 0$ ve $-3y + 2x - 11 = 0$ doğruları arasındaki uzaklık h olmak üzere

$h = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|5 - (-11)|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{16}{\sqrt{13}}$ birim bulunur.

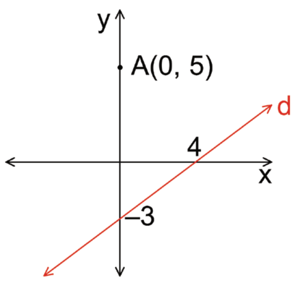
Buradan bir kenar uzunluğu $\frac{16}{\sqrt{13}}$ birim olan karenin alanı,

$A(ABCD) = \left(\frac{16}{\sqrt{13}}\right)^2 = \frac{256}{13}$ birimkare olur.

ALIŞTIRMALAR

1. Analitik düzlemde $3x - 4y + 5 = 0$ doğrusu üzerinde alınan B ve C noktaları arasındaki uzaklık 6 birimdir. Köşeleri $A(-1, -2)$ noktası ile B ve C noktalarından oluşan ABC üçgeninin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

2.



Analitik düzlemde yukarıdaki şekilde verilen $A(0, 5)$ noktasının d doğrusuna uzaklığının kaç birim olduğunu bulunuz.

3. Analitik düzlemde verilen $A(-1, 2)$ noktasının $5x - 12y + k = 0$ doğrusuna uzaklığı 1 birim olduğuna göre k'nin alabileceği değerleri bulunuz.

4. Analitik düzlemde verilen $x - 2y - 1 = 0$ ile $x - 2y + 4 + k = 0$ doğruları arasındaki uzaklık $2\sqrt{5}$ birim olduğuna göre k'nin alabileceği değerler toplamını bulunuz.

5. Analitik düzlemde karşılıklı iki kenarı $8x - 15y + 1 = 0$ ile $16x - 30y - 32 = 0$ doğruları üzerinde olan karenin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 1

A) Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerlere doğru ifadeyi yazınız.

1. İki sayı doğrusunun 0 (sıfır) sayısına karşılık gelen O noktasında birbiriyle dik kesişmesiyle oluşan sisteme .... denir.

2. $A(2, n-3)$ noktası x ekseni üzerinde olduğuna göre n ifadesinin değeri .... olur.

3. $x > 0$ ve $y < 0$ olduğuna göre $A(x, y)$ noktası analitik düzlemin .... bölgesindedir.

4. $A(-1, 2)$, $B(3, 6)$ noktalarının orta noktası .... olur.

5. Köşe noktalarının koordinatları $A(-2, 1)$, $B(1, 3)$ ve $C(7, 2)$ olan $(\widehat{ABC})$'nin ağırlık merkezi .... olur.

B) Aşağıda numaralarla verilen ifadeler ile harflerle verilen sayıların eşit olanlarını eşleştirip eşleşenleri alttaki kutulara yazınız.

6. $A(-2, 5)$, $B(1, 1)$, $C(-5, 9)$ ve $D(-7, 7)$ noktaları için

1. $|AB|$
2. $|BC|$
3. $|BD|+|CD|$

a) 3
b) 5
c) 12
ç) 10
d) $10+2\sqrt{2}$

1.	2.	3.

C) Aşağıdaki açık uçlu soruların doğru cevabını bulunuz.

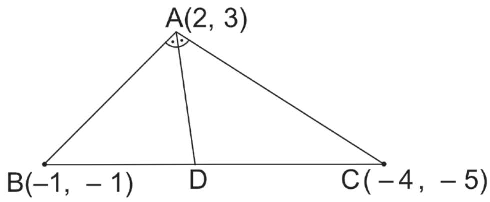
7. Analitik düzlemde köşeleri $A(-1, 2)$, $B(3, -4)$ ve $C(1, 6)$ olan ABC üçgeninde AB kenarına ait kenarortay uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.

8. Analitik düzlemde $A(3m+9, 2n-6)$ noktasının apsisi -6 ve ordinatı 2 olduğuna göre $n-m$ ifadesinin değerini bulunuz.

9. Analitik düzlemde $A(-1, 2-c)$ ile $B(4, -6)$ noktaları arasındaki uzaklık 13 birim olduğuna göre c'nin alabileceği değerlerin çarpımını bulunuz.

D) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruların doğru seçeneğini işaretleyiniz.

10.



Analitik düzlemde köşelerinin koordinatları şekildeki gibi verilen $\widehat{ABC}$'nde $[AD]$ $\widehat{BAC}$'nın açıortayı olmak üzere $[BC]$ üzerindeki D noktasının koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\left(-2, -\frac{1}{3}\right)$ B) $\left(-2, -\frac{7}{3}\right)$ C) $\left(-1, \frac{7}{3}\right)$

D) $\left(0, \frac{7}{3}\right)$ E) $\left(1, \frac{7}{3}\right)$

11. Analitik düzlemde $A(-1, 3)$ ve $B(2, 9)$ noktaları veriliyor. A, B, C noktaları doğrusal ve $C \notin [AB]$ olmak üzere $2 \cdot |AB| = 3 \cdot |AC|$ olduğuna göre C noktasının koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-3, -1)$ B) $(-3, 2)$ C) $(3, -2)$ D) $(3, 4)$ E) $(3, 6)$

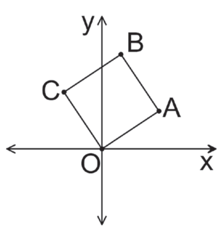
12. Analitik düzlemde köşelerinin koordinatları $A(-1, 2)$, $B(3, a-1)$ ve $C(b, 5)$ olan ABC üçgeninin ağırlık merkezi $G(1, 0)$ olduğuna göre $a+b$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) -7 B) -5 C) -4 D) 2 E) 5

13. Analitik düzlemin II. bölgesinde bulunan $A(k-1, 5+m)$ noktasının x eksenine uzaklığı 4 birim, y eksenine uzaklığı 5 birim olduğuna göre $k \cdot m$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) -3 B) 1 C) 2 D) 4 E) 6

14.



Yukarıdaki analitik düzlemde verilen OABC karesinde $C(-1, 3)$ olduğuna göre A noktasının koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(1, 2)$ B) $(3, 1)$ C) $(1, 3)$ D) $(2, 1)$ E) $(3, 3)$

15. $A(2k+2, k-5)$ noktası analitik düzlemin IV. bölgesinde olduğuna göre k'nin alabileceği değerlerin toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 4 B) 5 C) 7 D) 10 E) 14

16 - 18. soruları aşağıda verilen bilgilere göre cevaplandırınız.

Analitik düzlemde verilen ABCD paralelkenarı ile ilgili aşağıdaki bilgiler veriliyor.

I. Üç köşesi $A(0, 0)$, $B(2, 6)$, $C(6, 15)$'tir.

II. $E \in [AB]$ ve $|AE| = |EB|$'tir.

III. $[AC]$ ile $[DE]$ nın kesişme noktası K'dir.

Buna göre

16. E noktasının koordinatlarını bulunuz.

17. $|BK|$'nun kaç birim olduğunu bulunuz.

18. ABCD paralelkenarının ağırlık merkezinin koordinatlarını bulunuz.

DEĞERLENDİRME

Cevaplarınızı cevap anahtarı ile karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorularla ilgili konuları veya faaliyetleri geri dönerek tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 2

A) Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerlere doğru ifadeyi yazınız.

1. İki doğru birbirine dik ise eğimleri çarpımı ..... olur.

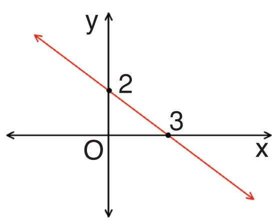
2. İki doğru birbirine paralel ise eğimleri birbirine .... olur.

3. İki doğru bir noktada kesişiyorsa iki doğruya ait denklemlerin çözüm kümesi .... elemanlıdır.

4. Bir doğrunun x ekseni ile pozitif yönde yaptığı açıya .... denir.

B) Aşağıda numaralarla verilen ifadelere ait doğruların eğimlerini harflerle verilen ifadelerden eşit olanlarıyla eşleştirip eşleşenleri altındaki kutuya yazınız.

5.
1. $x - y + 5 = 0$
2. $3x - 5y + 6 = 0$
3. $A(-1, 3)$ ve $B(2, 5)$
4.



a) $\frac{2}{5}$

b) $\frac{3}{5}$

c) 1

ç) $-\frac{2}{3}$

d) $\frac{2}{3}$

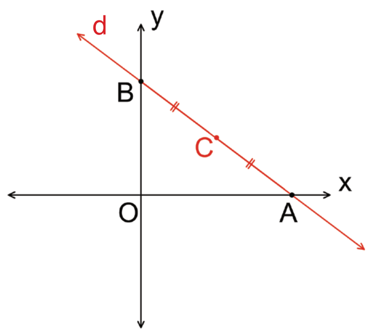
1.	2.	3.	4.

C) Aşağıdaki açık uçlu soruların doğru cevabını bulunuz.

6. Analitik düzlemde $A(-3, 1)$, $B(4, -2)$ ve $C(n-2, 8-n)$ noktaları doğrusal olduğuna göre n'nin değerini bulunuz.

7. Analitik düzlemde $A(k-2, k+2)$ ile $B(3, -1)$ noktalarından geçen doğru, x ekseni ile pozitif yönlü 135 derecelik açı yaptığına göre k'nin değerini bulunuz.

8.



Yukarıdaki şekilde analitik düzlemde d doğrusu üzerindeki $A(8, 0)$ ve $B(0, 6)$ noktaları verliyor. C noktası A ve B noktalarının orta noktası olduğuna göre C noktasının orijine olan uzaklığı kaç birimdir?

9 - 11. soruları aşağıda verilen bilgilere göre cevaplandırınız.

Analitik düzlemde
d_1: $2x + y - 12 = 0$ ve d_2: $x - y + 6 = 0$
doğruları veriliyor.

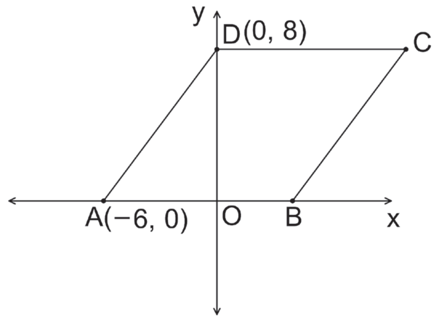
9. d_1 ve d_2 doğruları ile x ekseni arasında kalan alanın kaç birimkare olduğunu bulunuz.

10. d_1 ve d_2 doğruları ile eksenler arasında kalan alanın kaç birimkare olduğunu bulunuz.

11. $x = -1$ doğrusu, x ekseni ve d_1 ile d_2 doğruları arasında kalan bölgenin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

D) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruların doğru seçeneğini işaretleyiniz.

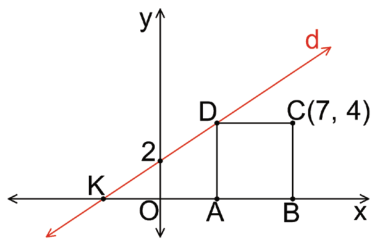
12.



Analitik düzlemde verilen yukarıdaki ABCD eşkenar dörtgeninde BC doğrusunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $3y - 4x - 16 = 0$
B) $3y + 4x + 16 = 0$
C) $4y - 3x + 16 = 0$
D) $4y + 3x + 16 = 0$
E) $3y - 4x + 16 = 0$

13.



Analitik düzlemde verilen ABCD karesinde $C(7, 4)$ noktası veriliyor. K ve D noktası d doğrusu üzerinde olduğuna göre K noktasının apsisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) −7 B) −6 C) −5 D) −4 E) −3

14. Analitik düzlemde $ax - by + 3 = 0$ ve $(2a-3)x + (b+1)y + 6 = 0$ doğruları $(-2, 3)$ noktasında kesiştiğine göre (a, b) aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(3, 1)$ B) $(-3, 1)$ C) $(-3, -1)$ D) $(3, -1)$ E) $(1, 3)$

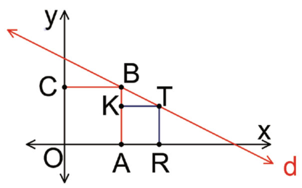
15. Analitik düzlemde verilen $2x - y + k - 5 = 0$ ve $ax + 4y - 4 = 0$ doğruları x ekseni üzerinde dik kesiştiğine göre $a - k$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 3

16. Analitik düzlemde verilen $x - y + 2 = 0$ ve $(k+1)x - 2y + 3 = 0$ doğruları birbirine paralel olduğuna göre bu iki doğru arasındaki uzaklık kaç birimdir?

A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{6}$

17.



Analitik düzlemde verilen yukarıdaki şekilde $x + 2y - 18 = 0$ doğrusu ile birer köşeleri bu doğru üzerinde olan OABC ve ARTK kareleri verilmiştir. A(ARTK) kaç birimkaredir?

A) 9 B) 16 C) 25 D) 36 E) 49

18. Analitik düzlemde verilen $x + y - 17 = 0$ ve $2x - 2\sqrt{3}y + 34 = 0$ doğruları arasındaki dar açının ölçüsü aşağıdakilerden hangisidir?

A) 35° B) 45° C) 65° D) 75° E) 85°

19. Analitik düzlemde verilen $A(-1, 0)$ noktasının $8x - 15y + b - 1 = 0$ doğrusuna olan uzaklığı 1 birim olduğuna göre b'nin alabileceği farklı değerler toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

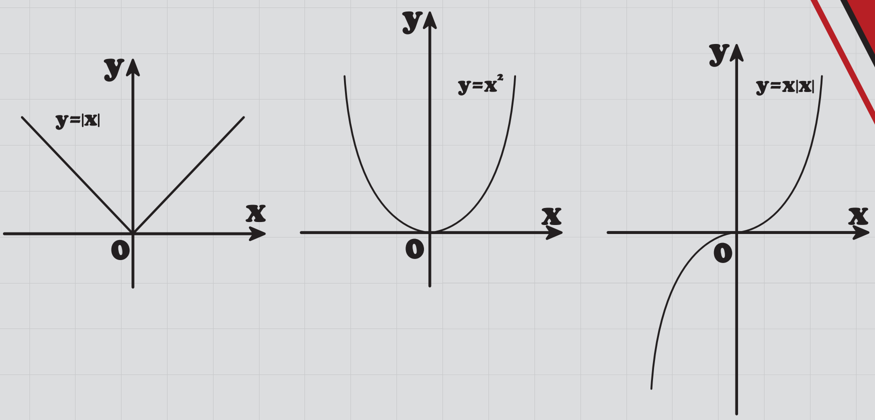
A) -18 B) -16 C) 14 D) 16 E) 18

DEĞERLENDİRME

Cevaplarınızı cevap anahtarı ile karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorularla ilgili konuları veya faaliyetleri geri dönerek tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.

SAYILAR VE CEBİR

3



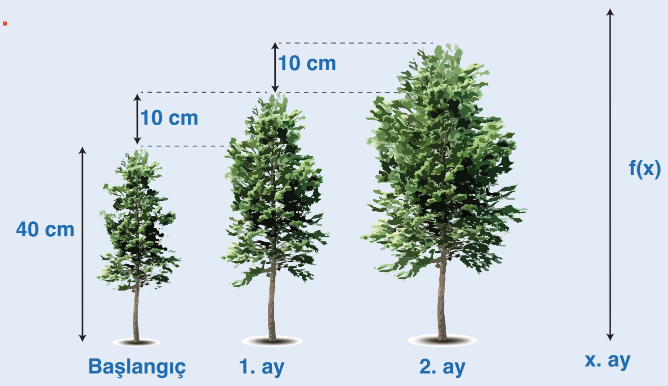
Fonksiyonlarda Uygulamalar

- 11.3.1. Fonksiyonlarla İlgili Uygulamalar
- 11.3.2. İkinci Dereceden Fonksiyonlar ve Grafikler
- 11.3.3. Fonksiyonların Dönüşümleri

11.3. Fonksiyonlarda Uygulamalar

Hazırlık Çalışması

1.



21-26 Mart Orman Haftası dolayısıyla Hasan Öğretmen, öğrencilere ormanların ekosistem için önemi hakkında bilgi vermiştir. Daha sonra birlikte valiliğin belirlediği Saygı Hatıra Ormanı alanına giderek okul Çevre Koruma Kulübü öğrencileri ile okul adına fidanlar dikmişlerdir. Hasan Öğretmen tarafından dikilen fidanla ilgili aşağıdaki bilgiler verilmektedir.

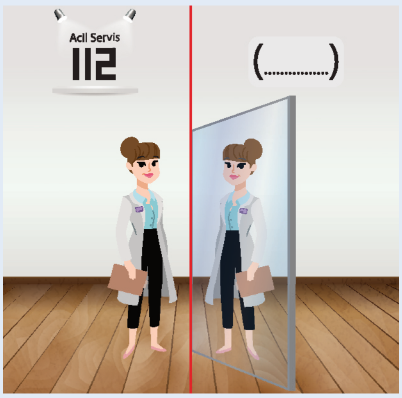
- Fidan dikildiğinde 40 cm uzunluğundadır.
- Bu fidan her ay 10 cm uzamaktadır.

Yukarıda verilen bilgilere göre aşağıdaki soruları cevaplandırınız.

a) Bu fidanın 6. ayın sonundaki uzunluğunu bulunuz.

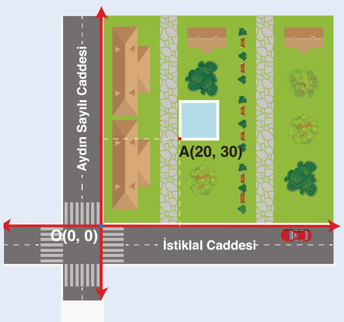
b) Bu fidanın x. ayın sonundaki uzunluğunu veren kuralı oluşturunuz.

2.



Hastanede görevli olan Dr. Tuğba Hanım'ın hastane koridorunun sonunda bulunan aynadan dijital rakamlarla yazılan 112 sayısını kaç olarak okuyacağını bulunuz.

3.



Bir belediyede görevli Mimar Emel Hanım, yandaki görselde verilen yeşil alan projesini oluşturuyor. Projeye göre bu alan Aydın Sayılı Caddesi ile İstiklal Caddesi'nin kesiştiği nokta orijin ve koordinatları metre cinsinden olacak biçimde tasarlanıyor. Daha sonra Belediye Meclisi, oy çokluğuyla görsel üzerindeki Aydın Sayılı Caddesi'nin sağ tarafının 5 metre genişletilmesi kararını alıyor. Mimar, orijin sabit kalacak şekilde başka bir değişiklik yapmadan bütün yeşil alanı şekil üzerinde 5 metre sağ tarafa kaydırıyor. Buna göre A noktasının yeni koordinatını bulunuz.

Bilim insanları karşılaştıkları sorunları çözmek için zamanla ulaştıkları çözüm metodlarını not ederek bilimin ortak mirasına sunarlar. Bilim insanlarının yaptığı çalışmalarla ilgili daha önce elde edilen ortak mirastaki bilimsel altyapı bilgilerini kullanması, sonraki aşamalar için kendisine zaman kazandıracak ve bilimin hızlı ilerlemesine katkı sağlayacaktır. Örneğin $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunda $f(x) = 0$ denklemini sağlayan x değerleri toplamının kısaca $-\frac{b}{a}$, çarpımının kısaca $\frac{c}{a}$ gibi pratik sonuçlarla bulunduğu biliniyor. Bu durumda $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun değerini 0 yapan x sayıları toplamının veya çarpımının bu şekilde bulunmasıyla zaman tasarrufu sağlanmış olur. Aynı şekilde $x \in \mathbb{Z}^+$ için $f(x) = 1 + 2 + 3 + ... + x$ fonksiyonunda $f(50) = 1 + 2 + 3 + ... + 50$ sorulduğunda bu toplamı bulmak için terimleri tek tek toplayarak işlemi sonuçlandırmak yerine geçmişte Gauss'un bulduğu $n \in \mathbb{Z}^+$ için $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ formülünde n değişkeninin yerine 50 yazarak sonuç kısa yoldan bulunur. $x \in \mathbb{Z}^+$ için $f(x) = 1 + 2 + 3 + ... + x = \frac{x \cdot (x+1)}{2}$ gibi formülleri çoğaltmak mümkündür. Bu ve buna benzer kurallar fonksiyon kavramı ile ifade edilir. İstenen sonuca ulaşabilmek için elde edilen formüllerde değişkenin yerine sayının yazılması yeterli olacaktır.

Bu bölümde, değişkene bağlı olarak verilen çok terimli fonksiyonun grafiği çizilip somutlaştırılarak daha kolay anlaşılması sağlanacaktır. Örneğin ikinci dereceden bir fonksiyonun grafiği bir parabol eğrisi oluşturmaktadır. Bu şekli, tarihte köprü ayaklarında, asma köprülerin taşıyıcı halatlarında ve daha birçok mimari eserde görmek mümkündür. Günümüzde var olan 15 Temmuz Şehitler Köprüsü, Yavuz Sultan Selim Köprüsü, Fatih Sultan Mehmet Köprüsü, Osman Gazi Köprüsü'nde de parabol eğrisine benzer parçaları görmek mümkündür.

11.3.1. Fonksiyonlarla İlgili Uygulamalar

Terimler ve Kavramlar

- Ortalama Değişim Hızı

Neler Öğreneceksiniz?

- Fonksiyonun grafik ve tablo temsilini kullanarak problem çözmeyi öğreneceksiniz.

11.3.1.1. Fonksiyonun Grafik ve Tablo Temsili

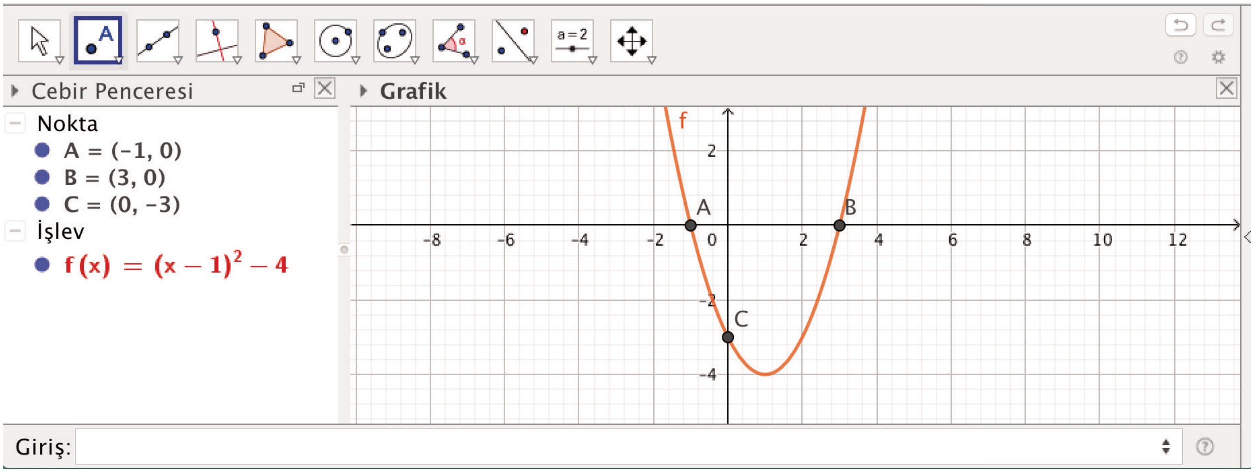
Grafiğin x ve y Eksenlerini Kestiği Noktalar

Örnek 1

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)^2-4$ foksiyonunun grafiğini dinamik matematik yazılımını kullanarak çiziniz ve x ile y eksenini kestiği noktaları belirleyiniz.

Çözüm

Dinamik matematik yazılımını açınız. Ekranın alt kısmındaki "Giriş" bölümüne tıklayarak $(x-1)^2-4$ yazınız. Ekranda $(x-1)^2-4$ fonksiyonunun grafiğinin çizilmiş olduğunu göreceksiniz.



Görsele dikkatli bakılırsa grafiğin x eksenini kestiği noktalar $A(-1,\ 0)$ ve $B(3,\ 0)$ iken y eksenini kestiği nokta $C(0,\ -3)$ olmaktadır.
Bu noktalar incelenirse

- x eksenini kesen noktaların ordinatlarının "0" olduğu görülür.
- y eksenini kesen noktanın apsisinin "0" olduğu görülür.

Bu durumda herhangi bir fonksiyonda $y=0$ için bulunan değerler ($y=f(x)=0$ denkleminin kökleri) x eksenini kesen noktaların apsisi iken $x=0$ için bulunan değer y eksenini kesen noktanın ordinatıdır.

Örnek 2

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-7x+10$ fonksiyonunun

a) x eksenini kestiği noktaları bulunuz. **b)** y eksenini kestiği noktayı bulunuz.

Çözüm

a) $y=f(x)$ olduğundan $y=x^2-7x+10$ yazılabilir. $y=0$ için
$0=x^2-7x+10 \Rightarrow 0=(x-2)\cdot(x-5)\Rightarrow x=2$ veya $x=5$ olup x eksenini kestiği noktalar $A(2,\ 0)$ ve $B(5,\ 0)$ olur.

b) $y=x^2-7x+10$ denkleminde $x=0$ için $y=0^2-7\cdot 0+10 \Rightarrow y=10$ bulunur. Buradan fonksiyonun y eksenini kestiği nokta $C(0,\ 10)$ olur.

Örnek 3

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2 \cdot \sin(x - \pi) + 1$ fonksiyonunun y eksenini kestiği noktayı bulunuz.

Çözüm

$x = 0$ için $y = 2 \cdot \sin(0 - \pi) + 1 \Rightarrow y = 2 \cdot \sin(-\pi) + 1 \Rightarrow y = 1$ olup y eksenini kestiği nokta $A(0, 1)$ olur.

Örnek 4

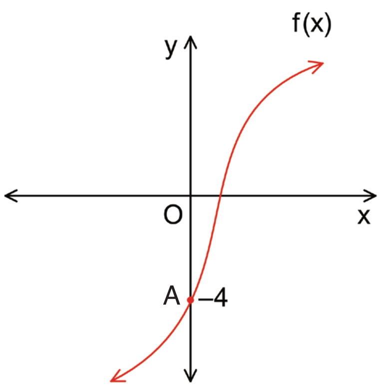
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ fonksiyonunun eksenleri kestiği noktaları bulunuz.

Çözüm

$x = 0$ için $f(0) = 0^3 + 0^2 - 2 \cdot 0 = 0$ olduğundan y eksenini kestiği nokta $A(0, 0)$ bulunur.
$y = 0$ için $0 = x^3 + x^2 - 2x \Rightarrow 0 = x \cdot (x^2 + x - 2) \Rightarrow 0 = x \cdot (x - 1) \cdot (x + 2)$
$\Rightarrow x = 0,\ x = 1$ ve $x = -2$ bulunur.

Bu durumda x eksenini kestiği noktalar $B(1, 0)$ ve $C(-2, 0)$, y eksenini kestiği nokta $A(0, 0)$ olur.

Örnek 5



Yandaki şekilde $f(x) = (x - k)^3 + 4$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Bu fonksiyonun grafiği y eksenini $A(0, -4)$ noktasında kesiyorsa x eksenini kestiği noktayı bulunuz.

Çözüm

y eksenini kestiği nokta $A(0, -4)$ ise $x = 0$ için $y = -4$ olmaktadır.
$y = (x - k)^3 + 4 \Rightarrow -4 = (0 - k)^3 + 4 \Rightarrow -4 = -k^3 + 4 \Rightarrow k^3 = 8 \Rightarrow k = 2$ olur. Bu durumda $f(x) = (x - 2)^3 + 4$ olur. Fonksiyonun x eksenini kestiği noktayı bulmak için $y = 0$ alınır.
$y = (x - 2)^3 + 4 \Rightarrow 0 = (x - 2)^3 + 4 \Rightarrow (x - 2)^3 = -4 \Rightarrow x - 2 = \sqrt[3]{-4} \Rightarrow x = 2 + \sqrt[3]{-4}$ buradan fonksiyonun x eksenini kestiği nokta $\left(2 + \sqrt[3]{-4},\ 0\right)$ olur.

Örnek 6

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x^2 - 13x + 10$ fonksiyonunun x ve y eksenlerini kestiği noktaları bulunuz.

Çözüm

- $x = 0$ için $f(0) = 0^3 + 2 \cdot 0^2 - 13 \cdot 0 + 10 = 10$ olup y eksenini kestiği nokta $A(0,10)$ bulunur.
- $f(x) = y = 0$ denkleminin kökleri x eksenini kesen noktaların apsisleri olduğundan

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 - 13x + 10 = 0 &\Rightarrow x^3 + 2x^2 - 15x + 2x + 10 = 0 \\ &\Rightarrow x \cdot (x^2 + 2x - 15) + 2(x+5) = 0 \\ &\Rightarrow x \cdot (x+5) \cdot (x-3) + 2(x+5) = 0 \\ &\Rightarrow (x+5) \cdot (x^2 - 3x + 2) = 0 \\ &\Rightarrow (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x+5) = 0 \\ &\Rightarrow x = 1,\ x = 2 \text{ ve } x = -5 \end{aligned}$$

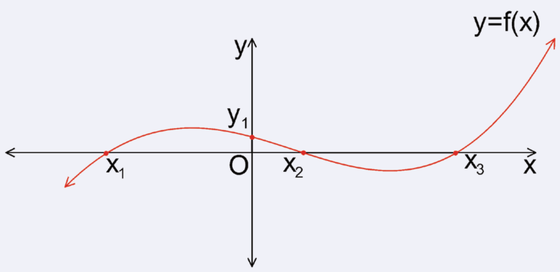
olup x eksenini kestiği noktalar $B(1,\ 0)$, $C(2,\ 0)$ ve $D(-5,\ 0)$ bulunur.

Sıra Sizde

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x^2 - 8x + 3$ fonksiyonu veriliyor. f fonksiyonunun grafiğinin eksenleri kestiği noktaları bulunuz.

Fonksiyonun Pozitif, Negatif, Artan ve Azalan Olduğu Aralıklar

Bilgi



$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin x ekseni üzerinde kalan parçaları için fonksiyonun **değerleri pozitif,** $(f(x) > 0)$; x ekseni altında kalan parçaları için fonksiyonun **değerleri negatif** $(f(x) < 0)$ olur.

Şekilde $f(x) > 0$ durumunu sağlayan tanım aralıkları $(x_1,\ x_2)$ ve $(x_3,\ \infty)$ olup $f(x) < 0$ durumunu sağlayan tanım aralıkları $(-\infty,\ x_1)$ ve $(x_2,\ x_3)$ olur.

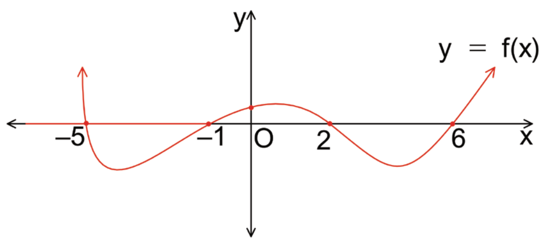
Örnek 7

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 6$ fonksiyonunun pozitif değer aldığı aralık ile negatif değer aldığı aralığı bulunuz.

Çözüm

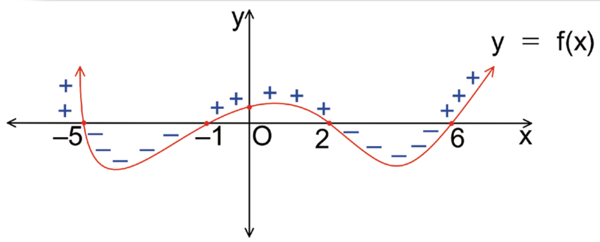
- $f(x) > 0 \Rightarrow 2x - 6 > 0 \Rightarrow 2x > 6 \Rightarrow x > 3$ olup pozitif olduğu aralık $(3, \infty)$ olur.
- $f(x) < 0 \Rightarrow 2x - 6 < 0 \Rightarrow 2x < 6 \Rightarrow x < 3$ olup negatif olduğu aralık $(-\infty, 3)$ olur.

Örnek 8



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir. Bu fonksiyonun pozitif değer aldığı aralıklar ile negatif değer aldığı aralıkları bulunuz.

Çözüm



$f(x) > 0$ durumunu sağlayan tanım aralıkları $(-\infty, -5)$, $(-1, 2)$ ve $(6, \infty)$ olup $f(x) < 0$ olmasını sağlayan tanım aralıkları $(-5, -1)$ ve $(2, 6)$ olur.

Örnek 9

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 6x - 27$ fonksiyonunun pozitif değer aldığı aralıklar ile negatif değer aldığı aralıkları bulunuz.

Çözüm

- Negatif olduğu aralık aşağıdaki gibi bulunur.
  $f(x) < 0 \Rightarrow x^2 + 6x - 27 < 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 < 36$ (Eşitsizliğin her iki tarafına 36 eklenirse)
  $$\Rightarrow (x+3)^2 < 36$$
  $$\Rightarrow \sqrt{(x+3)^2} < \sqrt{36}$$
  $$\Rightarrow |x+3| < 6$$
  $$\Rightarrow -6 < x+3 < 6 \Rightarrow -9 < x < 3$$

Fonksiyonun negatif olduğu aralık $(-9, 3)$ olur.

- Pozitif olduğu aralık aşağıdaki gibi bulunur.
  $f(x) > 0 \Rightarrow x^2 + 6x - 27 > 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 > 36$ (Eşitsizliğin her iki tarafına 36 eklenirse)
  $$\Rightarrow (x+3)^2 > 36$$
  $$\Rightarrow \sqrt{(x+3)^2} > \sqrt{36}$$
  $$\Rightarrow |x+3| > 6$$
  $$\Rightarrow x+3 < -6 \text{ veya } x+3 > 6$$
  $$\Rightarrow x < -9 \text{ veya } x > 3$$

Fonksiyonun pozitif olduğu aralıklar $(-\infty, -9)$ ile $(3, \infty)$ olur.

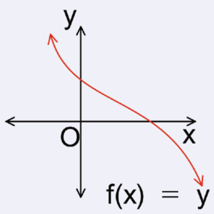
Sıra Sizde

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - x - 2$ fonksiyonunun pozitif değer aldığı aralıklar ile negatif değer aldığı aralıkları bulunuz.

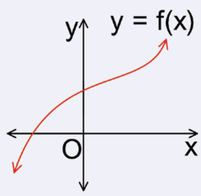
Bilgi

$A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. B, A'nın herhangi bir alt aralığı olsun. Her $x_1, x_2 \in B$ için

- $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ oluyorsa " f, B de **artan** fonksiyondur."
- $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) > f(x_2)$ oluyorsa " f, B de **azalan** fonksiyondur."



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, Azalan fonksiyon



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, Artan fonksiyon

Örnek 10

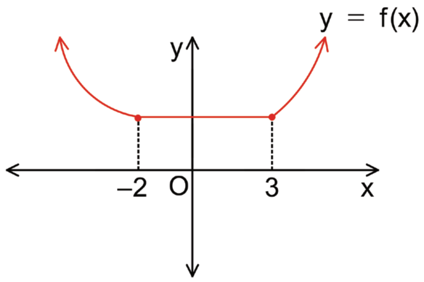
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$ ve $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -x + 5$ fonksiyonlarının artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

Çözüm

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ise $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için $x_1 < x_2$ olsun. $x_1 < x_2 \Rightarrow 2 \cdot x_1 < 2 \cdot x_2 \Rightarrow 2 \cdot x_1 - 3 < 2 \cdot x_2 - 3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ olup f fonksiyonu gerçek sayılar kümesinde artan fonksiyondur.

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ise $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için $x_1 < x_2$ olsun. $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow -x_1 + 5 > -x_2 + 5 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$ olup g fonksiyonu gerçek sayılar kümesinde azalan fonksiyondur.

Örnek 11

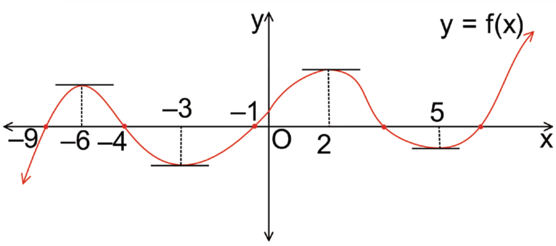


Şekilde verilen f fonksiyonunun azalan olduğu aralıkları, artan olduğu aralıkları bulunuz.

Çözüm

x artarken y değerleri azaldığından f fonksiyonu $(-\infty, -2]$ nda azalan ve x artarken y değerleri de arttığından f fonksiyonu $[3, \infty)$ aralığında artan fonksiyondur.
f fonksiyonu $[-2, 3]$ nda ne artan ne azalandır. f fonksiyonu bu aralıkta sabittir.

Örnek 12



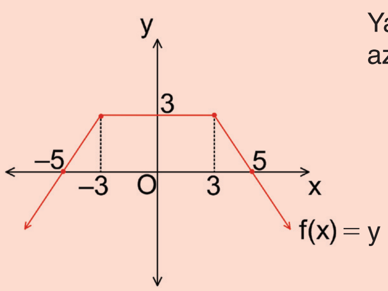
Şekilde gerçek sayılar kümesinde tanımlı f fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Bu fonksiyonun artan olduğu aralıklar ile azalan olduğu aralıklarını belirleyiniz.

Çözüm

Tanım aralığının alt aralığı olan $(-\infty, -6]$, $[-3, 2]$ ve $[5, \infty)$ aralıklarında x artarken y değerleri de arttığından fonksiyon artandır.

Tanım aralığının alt aralığı olan $[-6, -3]$ ve $[2, 5]$ aralıklarında x artarken y değerleri azaldığından fonksiyon azalandır.

Sıra Sizde



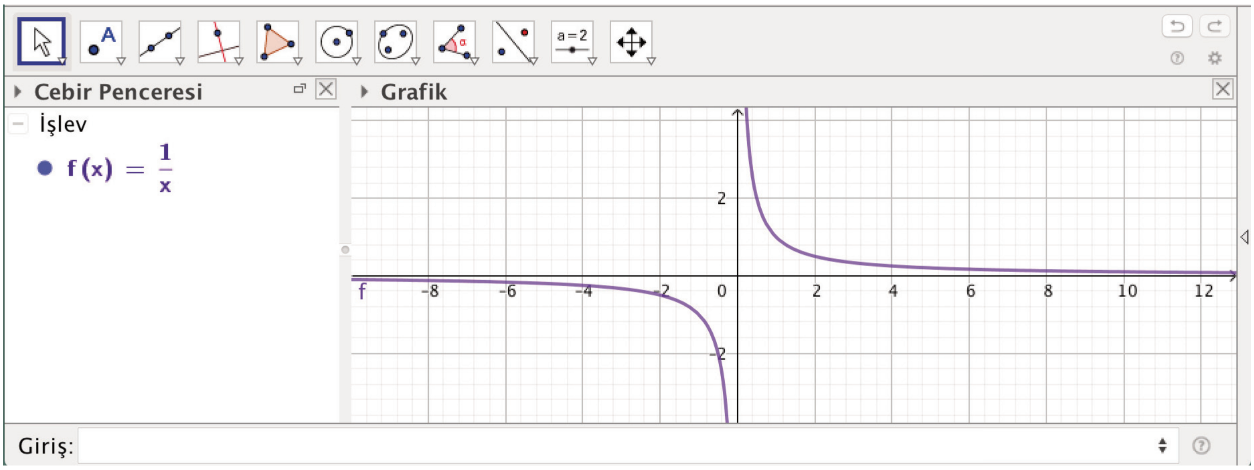
Yandaki şekilde grafiği verilen f fonksiyonunun artan olduğu aralığı, azalan olduğu aralığı bulunuz.

Örnek 13

$f: \mathbb{R}-\{0\} \rightarrow \mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x}$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları dinamik matematik yazılımı yardımıyla bulunuz.

Çözüm

Dinamik matematik yazılımını açınız ve “Giriş” bölümüne $\frac{1}{x}$ yazınız. Ekranda $f(x)=\frac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiğinin çizilmiş olduğunu göreceksiniz.



İki parçadan oluşan yukarıdaki grafiğin tanım aralıkları $(-\infty, 0)$ ve $(0, \infty)$ olduğundan

- $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ iken $x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ olduğu için fonksiyon bu aralıkta azalandır.
- $x_1, x_2 \in (0, \infty)$ iken $x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ olduğu için fonksiyon bu aralıkta azalandır.

Sonuç olarak bu fonksiyon tanımlı olduğu tüm aralıklarda azalandır.

Sıra Sizde

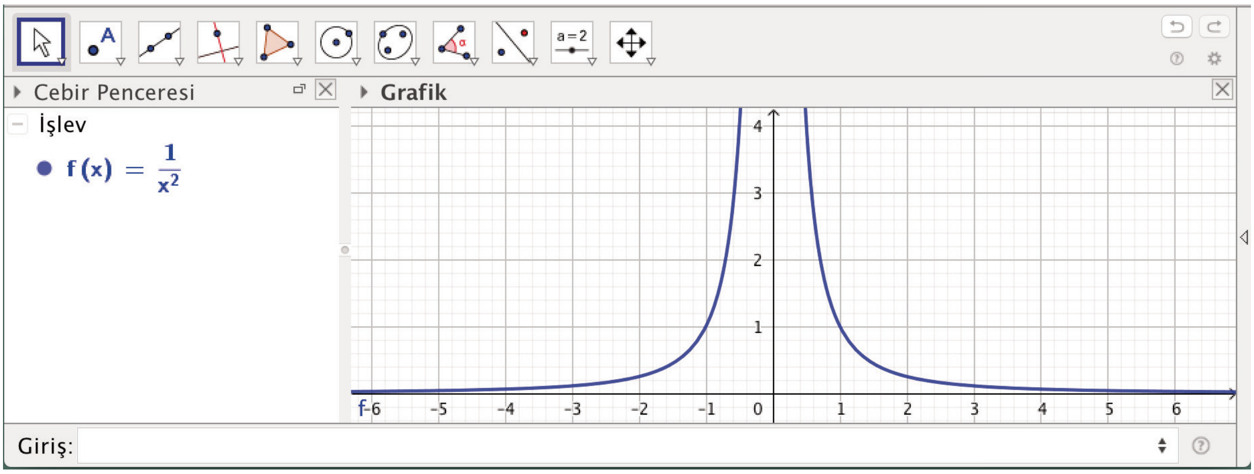
$f: \mathbb{R}-\{0\} \rightarrow \mathbb{R},\ f(x)=\frac{8}{3x}$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları dinamik matematik yazılımı yardımıyla bulunuz.

Örnek 14

$f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları dinamik matematik yazılımı yardımıyla bulunuz.

Çözüm

Dinamik matematik yazılımını açınız ve “Giriş” bölümüne $\dfrac{1}{x^2}$ yazarak “ENTER” tuşuna basınız. Ekranda $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ fonksiyonunun grafiğinin çizilmiş olduğunu göreceksiniz.



Yukarıdaki grafik iki parçadan oluştuğu için bu parçaların tanım aralıkları incelenmelidir. Bu aralıklar $(-\infty, 0)$ ve $(0, \infty)$ olduğundan

- $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ iken $x_1 < x_2 \Rightarrow {x_1}^2 > {x_2}^2 \Rightarrow \dfrac{1}{{x_1}^2} < \dfrac{1}{{x_2}^2} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ olduğu için fonksiyon bu aralıkta artandır.
- $x_1, x_2 \in (0, \infty)$ iken $x_1 < x_2 \Rightarrow {x_1}^2 < {x_2}^2 \Rightarrow \dfrac{1}{{x_1}^2} > \dfrac{1}{{x_2}^2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ olduğu için fonksiyon bu aralıkta azalandır.

Sıra Sizde

$f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{12}{7x^2}$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları dinamik matematik yazılımı yardımıyla bulunuz.

Bir Fonksiyonun Maksimum ve Minimum Değerleri

Bilgi

$f:[a,\ b] \rightarrow \mathbb{R},\ y = f(x)$ fonksiyonu verilsin.

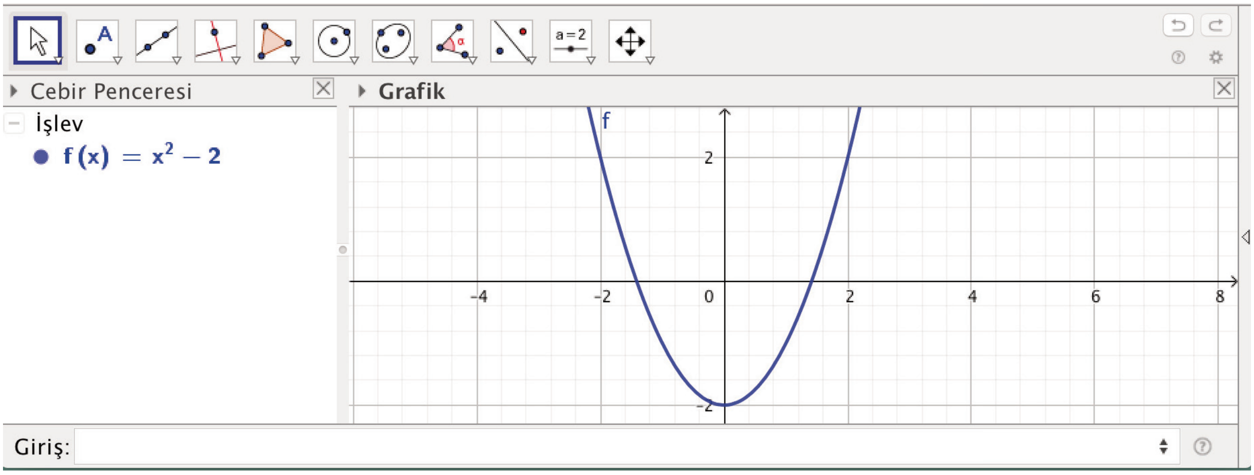
- $x,\ m \in [a,\ b]$ için $f(x) \leq f(m)$ olmasını sağlayan $f(m)$ değerine f'nin **maksimum değeri** denir.
- $x,\ m \in [a,\ b]$ için $f(x) \geq f(m)$ olmasını sağlayan $f(m)$ değerine f'nin **minimum değeri** denir.

Örnek 15

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 2$ fonksiyonunun minimum değerini bulunuz.

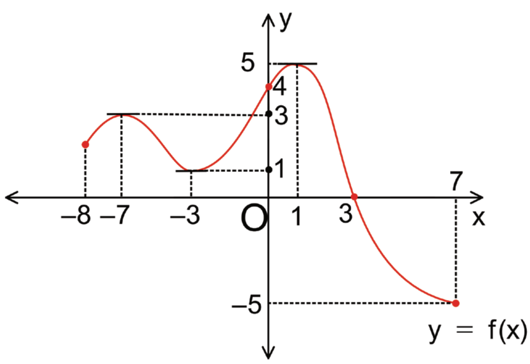
Çözüm

Dinamik matematik yazılımını açınız ve "Giriş" bölümüne $x^2 - 2$ yazınız. Ekranda $f(x) = x^2 - 2$ fonksiyonunun grafiğinin çizilmiş olduğunu göreceksiniz.



Fonksiyonun y ekseni üzerindeki görüntüsü olan değerler $[-2,\ \infty)$ aralığında olduğundan $f(x) = x^2 - 2$ fonksiyonunun minimum değeri -2 olur.

Örnek 16

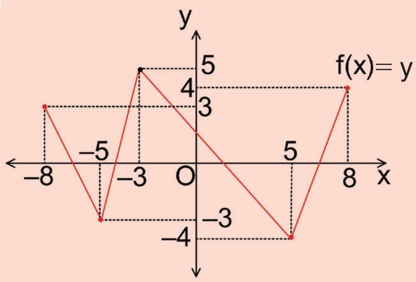


Yanda tanım kümesi $[-8,\ 7]$ olarak verilen f fonksiyonunun maksimum değerini, minimum değerini bulunuz.

Çözüm

Fonksiyonun y ekseni üzerinde bulunan değerleri -5, 5 arasında olduğundan değer aralığı $[-5, 5]$ olup maksimum değeri 5, minimum değeri -5 olur.

Sıra Sizde

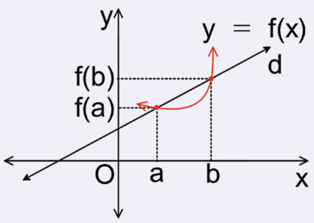


Yandaki şekilde grafiği verilen f fonksiyonunun $(-8, 8]$ aralığında maksimum değerini, minimum değerini bulunuz.

Ortalama Değişim Hızı

Bilgi

Bir fonksiyonun $[a, b]$ için **ortalama değişim hızı**, fonksiyonun grafiğini $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarında kesen doğrunun eğimidir.



Yandaki şekilde verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ için ortalama değişim hızı, d doğrusunun eğimi olan $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ değerine eşittir.

Örnek 17

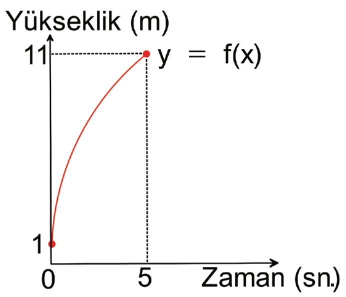
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 2$ fonksiyonunun $[1, 7]$ için ortalama değişim hızını bulunuz.

Çözüm

İstenilen ortalama değişim hızı,

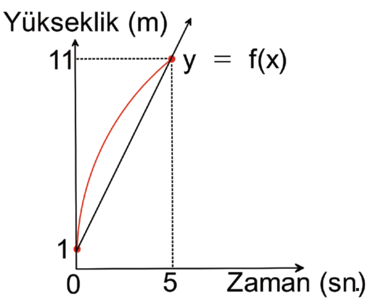
$\frac{f(7)-f(1)}{7-1} = \frac{(3 \cdot 7-2)-(3 \cdot 1-2)}{6} = \frac{19-1}{6} = 3$ olur.

Örnek 18



Durgun hâlde ve yerden 1 metre yükseklikte bulunan bir top havaya atıldığında yerden yüksekliğinin zamana bağlı değişimini gösteren grafiğe ait bir parçası yanda verilmiştir. Bu topun yüksekliğinin ilk atıldığı an ile 5. saniye arasındaki ortalama değişim hızını bulunuz.

Çözüm



Topun ilk atıldığı an durgun hâli yani 0. saniyedir. Bu durumda zaman aralığı olarak $[0,\ 5]$ için yüksekliğinin ortalama değişim hızı,
$\frac{f(5)-f(0)}{5-0}=\frac{11-1}{5}=\frac{10}{5}=2\ \text{m/sn.}$ olur.

İpucu

$f(x)=ax+b$ şeklindeki doğrusal fonksiyonların herhangi bir tanım aralığı için ortalama değişim hızı a'dır. aynı zamanda a değeri bu doğrunun eğimidir.

Örnek 19

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},\ f(x)=(3k-1)x-7$ fonksiyonunun $[-1,\ 2]$ için ortalama değişim hızı 5 olduğuna göre k gerçek sayısının değerini bulunuz.

Çözüm

$f(x)=ax+b$ şeklindeki doğrusal fonksiyonların herhangi bir tanım aralığı için ortalama değişim hızı a'dır. Buradan $f(x)=(3k-1)x-7$'nin ortalama değişim hızı her aralıkta $3k-1$ olur. Fonksiyonun $[-1,\ 2]$'nda ortalama değişim hızı 5 olduğundan $3k-1=5\Rightarrow k=2$ olur.

Örnek 20

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)^2+2$ fonksiyonunun $a\neq b$ olmak üzere $[a, b]$ için ortalama değişim hızı negatif olduğuna göre $a+b$'nin **en büyük** tam sayı değerini bulunuz.

Çözüm

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<0 \Rightarrow \frac{(b+1)^2+2-((a+1)^2+2)}{b-a}<0$$

$$\Rightarrow \frac{(b+1)^2+2-(a+1)^2-2}{b-a}<0$$

$$\Rightarrow \frac{(b+1)^2-(a+1)^2}{b-a}<0$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{(b-a)}\cdot(b+a+2)}{\cancel{b-a}}<0$$

$\Rightarrow b+a+2<0 \Rightarrow b+a<-2$ olup $a+b$ ifadesinin en büyük tam sayı değeri -3 olur.

Sıra Sizde

Ekmek israfına yönelik toplumsal duyarlılığı arttırmak için başlatılan bir kampanya çerçevesinde aylık ekmek israfı sayısı ile ilgili aşağıdaki tablo yapılarak kampanyanın etkisi anlatılmaya çalışılmıştır. Fakat tabloya 3 ay sonraki israf sayısının yazılması unutulmuştur.

Zaman	Başlangıç	1 ay sonra	2 ay sonra	3 ay sonra
İsraf Sayısı	300 000	280 000	250 000	

Ekmek israfı sayısının başlangıç ile 2 ay sonraki zaman aralığında ortalama değişim hızı, 1 ay sonraki ile 3 ay sonraki zaman aralığında ortalama değişim hızına eşit olduğuna göre 3 ay sonraki ekmek israfı sayısını bulunuz.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki fonksiyonların x ve y eksenlerini kestiği noktaları bulunuz.

a) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 4x + 4$

b) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + x - 6$

2. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = (2x - k)^3 + 8$ fonksiyonunun grafiğinin x eksenini kestiği noktanın apsisi 1 olduğuna göre y eksenini kestiği noktayı bulunuz.

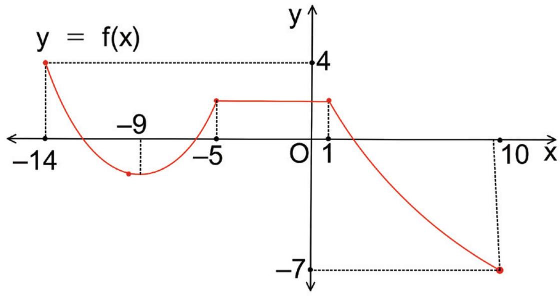
3. Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini dinamik matematik yazılımı kullanarak çizip artan ve azalan olduğu tanım aralıklarını bulunuz.

a) $f:\mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{2}{x-3}$

b) $f:\mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

c) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = (x+1)^3$

4. Tanım aralığı $[-14, 10]$ olan şekildeki $y = f(x)$ fonksiyonu için

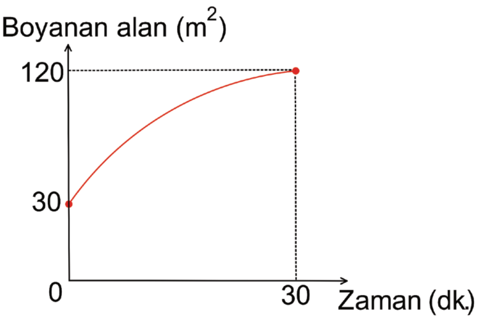


b) $[-9, 1]$ için artanlığını ve azalanlığını bulunuz.

c) $[-5, 10]$ için artanlığını ve azalanlığını bulunuz.

ç) Maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.

5.



Bir boya ustası duvarın 30 metrekaresini boyadıktan sonra işten ayrılıyor. Kalan işe devam eden başka bir boya ustasının 30 dakika içinde ara vermeden boyadığı alanı veren grafik, zaman (dk.)-alan (m^2) cinsinden yukarıda gösterilmiştir. Buna göre işe devam eden ustanın boyadığı alanın değişim hızını bulunuz.

11.3.2. İkinci Dereceden Fonksiyonlar ve Grafikleri

Terimler ve Kavramlar
- İkinci Dereceden Fonksiyon
- Tepe Noktası
- Parabol
- Simetri Ekseni

Sembol ve Gösterimler
- $y = ax^2 + bx + c$
- $y = a \cdot (x - r)^2 + k$
- $y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

Neler Öğreneceksiniz?

- İkinci dereceden bir değişkenli fonksiyonların grafiklerini çizme ve yorumlamayı,
- İkinci dereceden fonksiyonlarla modellenebilen problemleri çözmeyi öğreneceksiniz.

11.3.2.1. İkinci Dereceden Bir Değişkenli Fonksiyonların Grafikleri

Bilgi

$a \neq 0$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ şeklindeki fonksiyona **ikinci dereceden bir değişkenli fonksiyon** denir.

$f = \{(x, y) \mid y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0 \text{ ve } a, b, c \in \mathbb{R}\}$ kümesinin elemanları olan (x, y) ikililerine analitik düzlemde karşılık gelen noktaların oluşturduğu grafiğe **parabol** denir.

$a > 0$ ise grafiğin kolları şekildeki gibi yukarı doğrudur.

$a < 0$ ise grafiğin kolları şekildeki gibi aşağı doğrudur.

Örnek 1

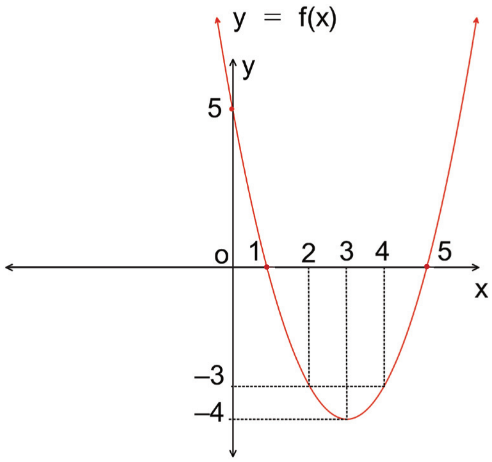
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 6x + 5$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm

$a = 1 > 0$ olduğundan fonksiyonun grafiğinin kolları yukarı doğrudur.
$x = 0$ için $f(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 + 5 = 5$ olup y eksenini kestiği nokta $(0, 5)$ olur.
$y = 0$ için $x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow (x-1)\cdot(x-5) = 0 \Rightarrow x = 1$ veya $x = 5$ olup x eksenini kestiği noktalar $(1, 0)$ ve $(5, 0)$ olur. Bazı x değerlerine göre y'nin aldığı değerler tablosu,

x	...	0	1	2	3	4	5	6	...
f(x)	...	5	0	–3	–4	–3	0	5	...

şeklinde oluşturulabilir. Tabloda $x = 3$ değişkenine eşit uzaklıktaki değişkenlerin aynı değeri verdiği görülür. Oluşturulan değer tablosundaki noktalar analitik düzlemde birleştirilerek parabol çizilir.



Parabolün azalan ve artan olmak üzere iki parçadan oluştuğu görülmektedir. $(-\infty, 3]$ için azalan, $[3, \infty)$ için artandır. Azalanlıktan artanlığa geçtiği nokta ise $T(3, -4)$ noktasıdır. T noktasının apsisinin parabolün x eksenini kestiği noktaların apsisi olan 1 ve 5 sayılarının aritmetik ortalaması olduğuna dikkat ediniz.

T noktasının apsisi 3 olduğundan x eksenindeki 3'e eşit uzaklıkta bulunan değişkenlerin görüntüleri de aynı değeri vermektedir. Örneğin çizilen parabolde x eksenindeki 4 ve 2 değişkenleri, 3 değişkenine 1 birim uzaklıkta ve $f(4) = f(2) = -3$ olmaktadır. Aynı şekilde $f(1) = f(5)$, $f(0) = f(6)$ olduğuna dikkat ediniz. Bu durumda parabol $x = 3$ doğrusuna göre simetrik olmaktadır. Fonksiyonun alabileceği en küçük değer T noktasının ordinatı olan -4'tür.

Örnek 2

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -2x^2 + 4x + 16$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

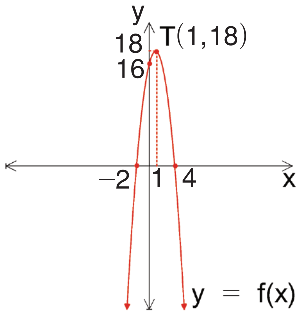
Çözüm

- $a = -2 < 0$ olduğundan parabolün kolları aşağı doğrudur.
- $x = 0$ için $f(0) = -2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 + 16 = 16$ olduğundan grafiğin y eksenini kestiği nokta $(0, 16)$ olur.
- $y = 0$ için $f(x) = -2x^2 + 4x + 16 = (-2x - 4)\cdot(x - 4) = 0 \Rightarrow x = -2$ veya $x = 4$ olup f'nin grafiğinin x eksenini kestiği noktalar $(-2, 0)$ ve $(4, 0)$ olur.

x'in bazı değerlerine göre y'nin aldığı değerler tablosu aşağıdaki gibidir.

x	...	-2	-1	0	1	2	3	...
$f(x)$	...	0	10	16	18	16	10	...

Tabloda $x = 1$ değişkenine eşit uzaklıkta bulunan değişkenlerin aynı değeri verdiği görülür. Oluşturulan değer tablosundaki noktalar analitik düzlemde birleştirilerek parabol çizilir.



- Parabol $(-\infty, 1]$ için artan, $[1, \infty)$ için azalandır. Artanlıktan azalanlığa geçtiği nokta ise $T(1, 18)$ noktasıdır. T noktasının apsisinin parabolün x eksenini kestiği noktaların apsisi olan -2 ve 4 sayılarının aritmetik ortalaması olduğuna dikkat ediniz. Tablodan da anlaşılacağı gibi $x = 1$ doğrusuna eşit uzaklıktaki apsislerin görüntüleri aynı değeri verdiğinden grafik $x = 1$ doğrusuna göre simetriktir.
- Fonksiyonun alabileceği en büyük değer T noktasının ordinatı olan 18'dir.

Sıra Sizde

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 5x - 6$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Bilgi

- $a \neq 0$, a, b, $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c$ olsun.
  Bir parabolün artanlıktan azalanlığa ya da azalanlıktan artanlığa geçtiği noktasına **tepe noktası** denir. Tepe noktası $T(r, k)$ olduğuna göre, $r = -\dfrac{b}{2a}$ ve $k = f(r) = f(-\dfrac{b}{2a}) = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ olur.
- Tepe noktası $T(r, k)$ ise grafiğin şekline göre **en büyük** ya da **en küçük** değeri k'dir.
- Grafiğin tepe noktasından geçen $x = -\dfrac{b}{2a}$ doğrusuna parabolün **simetri ekseni** denir.

Örnek 3

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 4x - 1$ fonksiyonunun grafiğinin simetri ekseni, tepe noktası, en küçük ya da en büyük değeri ile eksenleri kestiği noktaları bulunuz.

Çözüm

$f(x) = ax^2 + bx + c = x^2 - 4x - 1$ ise $a = 1,\ b = -4$ ve $c = -1$ olur. Buradan

- Simetri ekseni $x = 2$ doğrusudur.
- $r = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{(-4)}{2 \cdot 1} = 2$ ve $k = f(r) = f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 - 1 = -5$ olduğundan tepe noktası $T(2, -5)$ olur.
- $a = 1 > 0$ olduğundan parabolün kolları yukarı doğrudur. Bu durumda parabolün en küçük değeri vardır. Bu değer tepe noktasının ordinatı olan -5'tir.
- $c = -1$ olduğundan y eksenini kestiği nokta $(0, -1)$ olur.
- $x^2 - 4x - 1 = 0$ denkleminin kökleri olan x_1 ve x_2 değerleri grafiğin x eksenini kestiği noktaların apsisleridir.
- $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-4) - \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \dfrac{4 - 2\sqrt{5}}{2} = 2 - \sqrt{5}$ ve

  $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-4) + \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \dfrac{4 + 2\sqrt{5}}{2} = 2 + \sqrt{5}$

  olduğundan x eksenini kesen noktalar $(2 - \sqrt{5}, 0)$ ile $(2 + \sqrt{5}, 0)$ olur.

Sıra Sizde

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 6x + 8$ fonksiyonun grafiğinin tepe noktasını, en küçük ya da en büyük değerini, simetri ekseni ile eksenleri kestiği noktaları bulunuz.

Örnek 4

Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini dinamik matematik yazılımını kullanarak çiziniz. Bu fonksiyonların diskriminantlarını bularak diskriminant ile fonksiyonun grafiğinin eksenleri kesip kesmemesi arasında nasıl bir ilişki olduğunu belirtiniz.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 3x + 4$

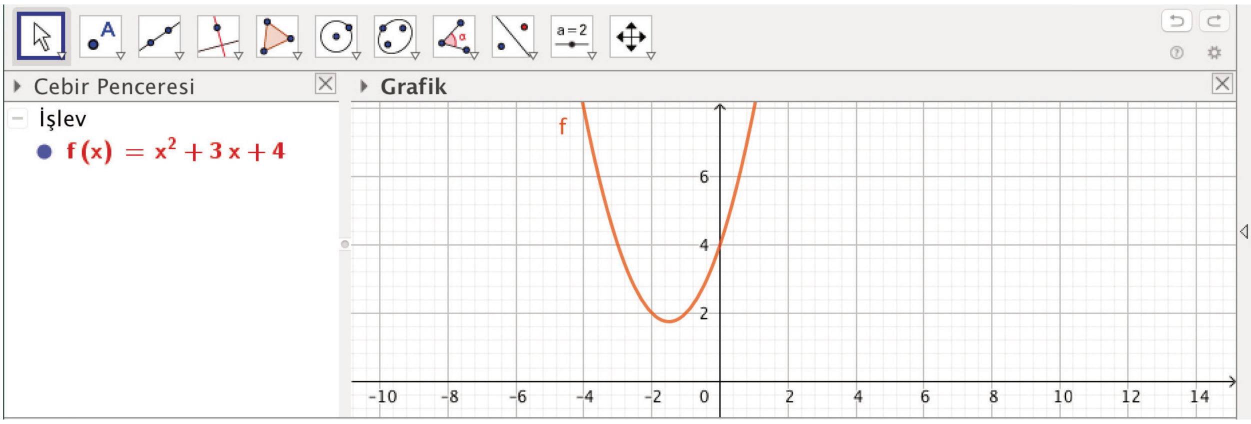
b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2 - 4x + 4$

c) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = 3x^2 + x - 1$

Çözüm

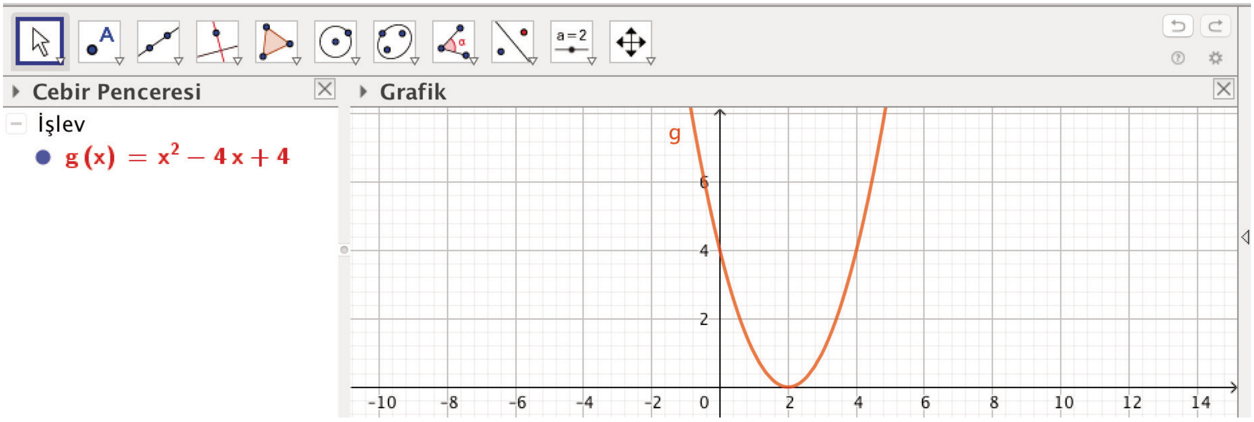
Dinamik matematik yazılımı açılarak “Giriş” bölümüne fonksiyonu belirten cebirsel ifade yazılırsa grafik penceresinde o fonksiyona ait grafik görülecektir.

a) $f(x) = x^2 + 3x + 4 \Rightarrow a = 1,\ b = 3$ ve $c = 4$ olmak üzere fonksiyonunun diskriminantı
$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9 - 16 = -7$ bulunur.



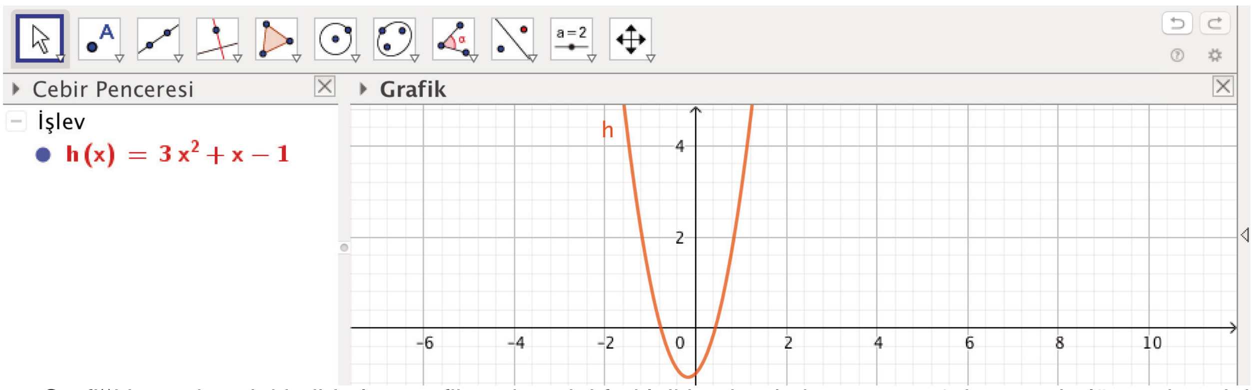
Grafiği ise yukarıdaki gibi olup grafik x eksenini kesmemektedir. Buradan $\Delta < 0$ ise fonksiyonun grafiğinin x eksenini kesmediği anlaşılır.

b) $g(x) = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow a = 1,\ b = -4$ ve $c = 4$ olmak üzere fonkiyonun diskriminantı
$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$ bulunur.



Grafiği ise yukarıdaki gibi olup grafik x eksenine sadece tepe noktasında değmiştir. Bu durumda parabol x eksenine **teğet durumdadır** denir. Buradan $\Delta = 0$ ise parabolün x eksenine teğet olduğu anlaşılır.

c) $h(x) = 3x^2 + x - 1 \Rightarrow a = 3,\ b = 1$ ve $c = -1$ olmak üzere diskriminantı
$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 1 + 12 = 13$ bulunur.



Grafiği ise yukarıdaki gibi olup grafik x eksenini farklı iki noktada keser. $\Delta > 0$ ise parabolün x eksenini iki farklı noktada kestiği anlaşılır.

Örnek 5

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+4x+1$ fonksiyonunun grafiği x eksenine teğet olduğuna göre a değerini bulunuz.

Çözüm

Parabol x eksenine teğet ise $\Delta=0$ olmalıdır. Buradan $\Delta=0\Rightarrow(4)^2-4\cdot a\cdot 1=0\Rightarrow 4a=16\Rightarrow a=4$ olur.

Örnek 6

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ve $t\neq 0$ olmak üzere $f(x)=tx^2+(t-2)x+3$ fonksiyonunun grafiğine ait tepe noktası y ekseni üzerinde olduğuna göre grafiğin tepe noktasını ve t değerini bulunuz.

Çözüm

Parabolün tepe noktası $T(r,\ k)$ y ekseni üzerinde olduğundan $r=0$ olur. Bu durumda grafiğin y eksenini kestiği nokta aynı zamanda tepe noktasıdır. Buradan $f(x)=tx^2+(t-2)x+3$'ün y eksenini kestiği nokta olan tepe noktası $T(r,\ k)=T(0,\ 3)$ olur. Buradan $a=t,\ b=t-2$ ve $c=3$ değerleri için
$r=-\dfrac{b}{2a}=0\Rightarrow-\dfrac{(t-2)}{2\cdot t}=0\Rightarrow t=2$ olur.

Örnek 7

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+tx-6$ fonksiyonun grafiğinin simetri ekseni $x=3$ doğrusu olduğuna göre t değerini bulunuz.

Çözüm

$f(x)=x^2+tx-6$ fonksiyonunda $a=1,\ b=t$ ve $c=-6$ için simetri ekseni
$x=-\dfrac{b}{2a}=3\Rightarrow\dfrac{-t}{2\cdot 1}=3\Rightarrow t=-6$ olur.

Örnek 8

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=nx^2-12x+n+5$ fonksiyonunun grafiği x eksenine pozitif tarafta teğet olduğuna göre n gerçek sayısını bulunuz.

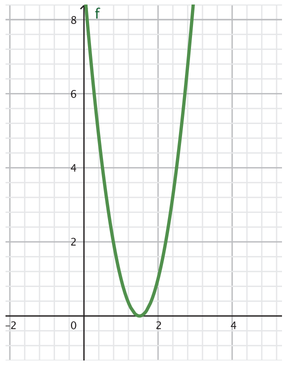
Çözüm

Parabol x eksenine teğet ise $\Delta = 0$ olmalıdır.

$\Delta = 0 \Rightarrow (-12)^2 - 4 \cdot n \cdot (n+5) = 0 \Rightarrow \frac{144}{-4} - \frac{4n^2}{-4} - \frac{20n}{-4} = \frac{0}{-4}$

$\Rightarrow n^2 + 5n - 36 = 0$

$\Rightarrow (n+9) \cdot (n-4) = 0 \Rightarrow n = -9$ veya $n = 4$ olur.



Parabol x eksenine pozitif tarafta teğet olduğundan tepe noktasının apsisi olan r değeri, x ekseni üzerinde ve pozitif olmalıdır.

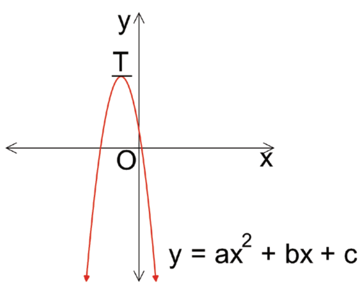
$f(x) = nx^2 - 12x + n + 5$ fonksiyonunda $a = n$, $b = -12$ ve $c = n + 5$ için

$r > 0 \Rightarrow -\frac{b}{2a} > 0 \Rightarrow -\frac{(-12)}{2 \cdot n} > 0 \Rightarrow \frac{6}{n} > 0 \Rightarrow n > 0$ olmalıdır. Bu durumda $n > 0$ olup $n = 4$ olur.

Sıra Sizde

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + (k-1)x + 4$ fonksiyonunun grafiği x eksenine negatif tarafta teğet olduğuna göre k gerçek sayısını bulunuz.

Örnek 9



Şekildeki $f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolünün $T(r, k)$ tepe noktası analitik düzlemin **II.** bölgesindedir. Buna göre

I. $b \cdot c < 0$

II. $4 \cdot a \cdot c - b^2 < 0$

III. $a \cdot b \cdot c < 0$

eşitsizliklerinden hangilerinin doğru hangilerinin yanlış olduğunu bulunuz.

Çözüm

$T(r, k)$ ise $r = -\frac{b}{2a}$, $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$ olur.

Parabolün kolları aşağı doğru olduğundan $a < 0$ olur.
Parabol y eksenini pozitif tarafta kestiğinden $c > 0$ olur.
$T(r, k)$ noktası **II.** bölgede olduğundan $r < 0$ ve $k > 0$ olmalıdır.

$-\frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow -\frac{b}{2a} \cdot a > 0 \cdot a$, a negatif olduğundan $-\frac{b}{2} > 0 \Rightarrow -\frac{b}{2} \cdot (-2) < 0 \cdot (-2) \Rightarrow b < 0$ olur.

Buradan $b < 0$ eşitsizliğinin her iki tarafı c ile çarpılırsa $b \cdot c < 0$ olur. Bu durumda **I.** eşitsizlik doğrudur.

$\frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4a} > 0 \Rightarrow \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{\cancel{4a}} \cdot \cancel{4a} < 0 \cdot 4a \Rightarrow 4 \cdot a \cdot c - b^2 < 0$ olup **II.** eşitsizlik doğrudur.

$a < 0$, $b < 0$ ve $c > 0 \Rightarrow a \cdot b \cdot c > 0$ olur. Bu durumda **III.** eşitsizlik yanlıştır.

Örnek 10

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 4x + t - 2$ parabolü x eksenini kesmediğine göre t'nin çözüm aralığını bulunuz.

Çözüm

$f(x) = x^2 - 4x + t - 2$ parabolü x eksenini kesmediğine göre $\Delta < 0$ olmalıdır. Bu durumda $a = 1,\ b = -4$ ve $c = t - 2$
$\Delta < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (t-2) < 0 \Rightarrow 16 - 4t + 8 < 0 \Rightarrow 24 < 4t \Rightarrow 6 < t$ olup t'nin çözüm aralığı $(6, \infty)$ olur.

Sıra Sizde

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 6x + k$ parabolü x eksenini kesmediğine göre k'nin çözüm aralığını bulunuz.

Örnek 11

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 8x + 15$ fonksiyonunun görüntü kümesi A ve $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = -x^2 + 3$ fonksiyonunun görüntü kümesi B olduğuna göre $A \cap B$ kümesini bulunuz.

Çözüm

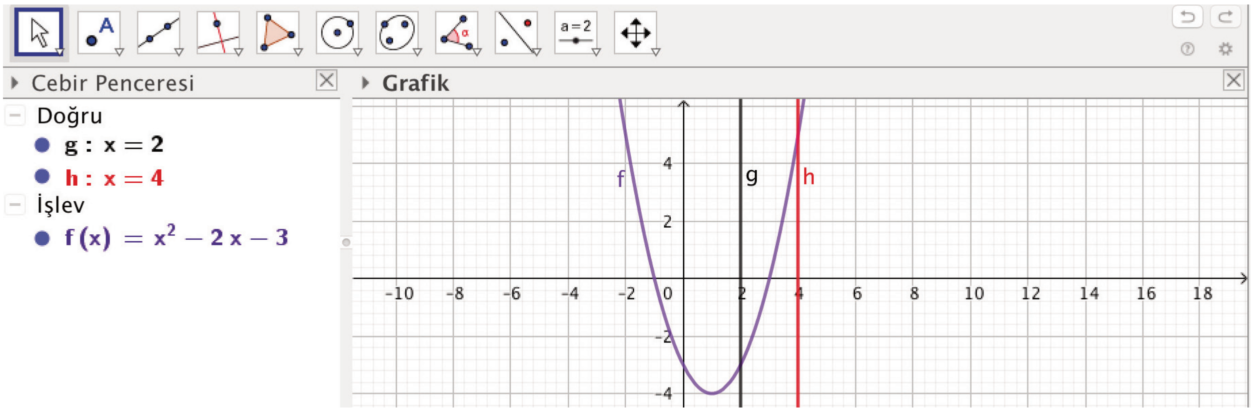
$f(x) = x^2 - 8x + 15$ fonksiyonunun grafiği $a = 1 > 0$ olduğundan parabolün kolları yukarı doğrudur. Bu durumda fonksiyonun en küçük değeri vardır ve bu değer tepe noktasının ordinatıdır. Tepe noktası $T(r, k)$ ise $r = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-8)}{2 \cdot 1} = 4$ ve $k = f(r) = f(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 + 15 = -1$ olduğundan en küçük değeri -1 ve görüntü kümesi $A = [-1, \infty)$ bulunur.
$g(x) = -x^2 + 3$ fonksiyonunun grafiği $a = -1 < 0$ olduğundan parabolün kolları aşağı doğrudur. Bu durumda fonksiyonun en büyük değeri vardır ve bu değer tepe noktasının ordinatıdır. Tepe noktası $T(r, k)$ ise $r = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2 \cdot (-1)} = 0$ ve $k = f(r) = f(0) = -0^2 + 3 = 3$ olduğundan en büyük değeri 3 ve görüntü kümesi $B = (-\infty, 3]$ bulunur. $A = [-1, \infty)$ ve $B = (-\infty, 3]$ ise $A \cap B = [-1, 3]$ olur.

Örnek 12

$f: [2, 4] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 2x - 3$ fonksiyonunun alabileceği en büyük ve en küçük değerini dinamik matematik yazılımını kullanarak bulunuz.

Çözüm

Dinamik matematik yazılımını açınız. Grafik penceresinde sağ tıklayarak “Grid” sekmesini seçiniz ve “Giriş” bölümüne x^2-2x-3 yazınız. Araç çubuğundaki 4. kutuya ve ardından açılan “Dik doğru” sekmesine basınız. Tanım aralığı $[2, 4]$ olduğundan x eksenindeki 2 ve 4 noktalarına tıklayarak $x=2$ ve $x=4$ doğrularını çiziniz. Bu durumda verilen tanım aralığına göre istenilen grafik $f(x)=x^2-2x-3$, $x=2$ ve $x=4$ doğruları arasında kalan parça olur.



Bu parçanın görüntüsü olarak y ekseninde en küçük değer -3, en büyük değer 5 olarak bulunur. Grafiğe dikkatli bakılırsa tepe noktası $T(1,-4)$ görülmektedir. Fakat tepe noktasının apsisi tanım aralığında olmadığından ($1 \notin [2, 4]$) tepe noktasının ordinatı en büyük ya da en küçük değer olarak alınamamaktadır. Eğer grafik çizilmeseydi tanım aralığı olan $[2, 4]$ uç noktaları için $f(2)=2^2-2\cdot2-3=-3$ ve $f(4)=4^2-2\cdot4-3=5$ bulunur ve bu değerlerden küçük olan en küçük değer, büyük olan en büyük değer olarak alınırdı.

İpucu

$r \in [m, n]$, $f:[m, n] \to \mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$ fonksiyonunun tepe noktası $T(r, k)$ olmak üzere

- $r \notin [m, n]$ ise $f(m)$ ve $f(n)$ değerlerinden büyük olan fonksiyonun en büyük değeri, küçük olan fonksiyonun en küçük değeridir.
- $r \in [m, n]$ ise $f(r)$, $f(m)$ ve $f(n)$ değerlerinden küçük olan en küçük değer, büyük olan en büyük değerdir.

Örnek 13

$f:[-3, 5] \to \mathbb{R}$, $f(x)=-3x^2-12x+4$ fonksiyonunun en büyük ve en küçük değerini bularak fonksiyonun görüntü kümesini bulunuz.

Çözüm

- Tepe noktası $T(r,k)$ olsun. Buradan $r=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{(-12)}{2\cdot(-3)}=-2$ bulunur. $-2 \in [-3, 5]$ olduğundan $k=f(-2)=-3\cdot(-2)^2-12\cdot(-2)+4=16$ olur.
- $f(-3)=-3\cdot(-3)^2-12\cdot(-3)+4=-27+36+4=13$ olur.
- $f(5)=-3\cdot(5)^2-12\cdot(5)+4=-75-60+4=-131$ olur.

$f(-2)=16$, $f(-3)=13$ ve $f(5)=-131$ değerleri arasındaki en küçük değer -131, en büyük değer 16 olur. Buradan verilen tanım aralığına göre fonksiyonun görüntü kümesi $[-131, 16]$ olur.

Buluyorum

$a \neq 0$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolünün tepe noktası $T(r, k)$ olmak üzere

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f(x) = a\cdot\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \Rightarrow f(x) = a\cdot\left(x^2 - 2rx + \frac{c}{a}\right) \qquad \left(\frac{-b}{2a} = r \Rightarrow \frac{b}{a} = -2r\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = a\cdot\left((x-r)^2 - r^2 + \frac{c}{a}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = a\cdot\left((x-r)^2 - \left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = a\cdot\left((x-r)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = a\cdot(x-r)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$\Rightarrow f(x) = a\cdot(x-r)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \qquad \left(\frac{4ac-b^2}{4a} = k\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = a\cdot(x-r)^2 + k \text{ olur.}$$

Dolayısıyla $a \neq 0$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolünün tepe noktası $T(r, k)$ iken $f(x) = a\cdot(x-r)^2 + k$ şeklinde de yazılabilir.

Örnek 14

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2(x-4)^2 - 8$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

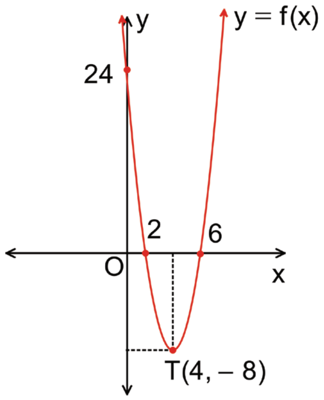
Çözüm

Parabolün tepe noktası $T(r, k)$ ise $f(x) = a\cdot(x-r)^2 + k \Rightarrow 2\cdot(x-4)^2 - 8 = a\cdot(x-r)^2 + k$ olup $a = 2$, $r = 4$ ve $k = -8$ bulunur. Buradan $T(4, -8)$ ve $a = 2 > 0$ olduğundan grafiğin kolları yukarı doğrudur.

x eksenini kesen noktaların apsisi $y = 0$ için

$0 = 2(x-4)^2 - 8 \Rightarrow 2(x-4)^2 = 8 \Rightarrow (x-4)^2 = 4 \Rightarrow (x-4)^2 = 2^2 \Rightarrow |x-4| = 2 \Rightarrow x = 2$ veya $x = 6$ olur.

y eksenini kesen noktanın ordinatı $x = 0$ için $y = 2\cdot(0-4)^2 - 8 = 32 - 8 = 24$ olur. Grafik y eksenini $(0, 24)$ noktasında keser. Bulunan değerler analitik düzlemde aşağıda verilen şekildeki gibi gösterilir.



Örnek 15

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-3\cdot(x+t)^2+m-1$ parabolünün tepe noktası $T(-2,\ 4)$ olduğuna göre $t\cdot m$ gerçek sayısını bulunuz.

Çözüm

Tepe noktası $T(-2,\ 4)$ olan parabolün denklemi için $r=-2,\ k=4$ değerleri $f(x)=a\cdot(x-r)^2+k$ eşitliğinde yerine yazılırsa $f(x)=a(x-(-2))^2+4=a(x+2)^2+4$ elde edilir.
Buradan $f(x)=-3\cdot(x+t)^2+m-1=a(x+2)^2+4$ eşitliğinden $t=2$ ve $m=5$ bulunur.
Buradan $t\cdot m=2\cdot 5=10$ olur.

Buluyorum

$a\neq 0,\ a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$ ve $f(x)=ax^2+bx+c$ verilsin. $ax^2+bx+c=0$ denkleminin kökleri ($f(x)=ax^2+bx+c$ parabolünün x eksenini kestiği noktaların apsisleri) x_1 ve x_2 ise $f(x)=ax^2+bx+c\Rightarrow f(x)=ax^2+\frac{abx}{a}+\frac{ac}{a}\Rightarrow f(x)=a\left(x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}\right)$ olur. Buradan

$\frac{-b}{a}=x_1+x_2\Rightarrow\frac{b}{a}=-(x_1+x_2)$ ve $\frac{c}{a}=x_1\cdot x_2$ olduğundan

$$\begin{aligned}f(x)&=a\cdot(x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2)\\&=a\cdot(x^2-x_1\cdot x-x_2\cdot x+x_1\cdot x_2)\\&=a\cdot(x\cdot(x-x_1)-x_2\cdot(x-x_1))\\&=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\ \text{olur.}\end{aligned}$$

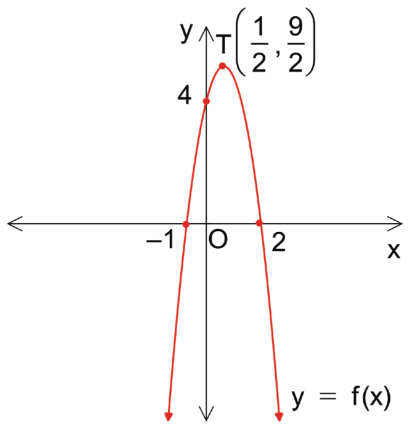
Dolayısıyla $a\neq 0,\ a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$ için $f(x)=ax^2+bx+c$ parabolünün x eksenini kestiği noktaların apsisleri x_1 ve x_2 olmak üzere $f(x)=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$ şeklinde de yazılabilir.

Örnek 16

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-2\cdot(x+1)\cdot(x-2)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm

$f(x)=-2\cdot(x+1)\cdot(x-2)$ ise $a=-2$ olduğundan fonksiyonun grafiğinin kolları aşağı doğrudur.
x eksenini kesen noktaların apsisi
$y=0$ için $0=-2\cdot(x+1)\cdot(x-2)\Rightarrow x_1=-1$ ve $x_2=2$ olup f'nin grafiği x eksenini $(-1,\ 0)$ ve $(2,\ 0)$ noktalarında keser.
y eksenini kesen noktanın ordinatı
$x=0$ için $y=-2\cdot(0+1)\cdot(0-2)\Rightarrow y=4$ olup f'nin grafiği y eksenini $(0,\ 4)$ noktasında keser.



Tepe noktası $T(r,\ k)$ ise

$r=-\frac{b}{2a}=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2}$

$k=f\left(\frac{1}{2}\right)=-2\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-2\right)=\frac{9}{2}$ olur.

Bu verilenler analitik düzlemde yanda verilen şekildeki gibi gösterilir.

Sıra Sizde

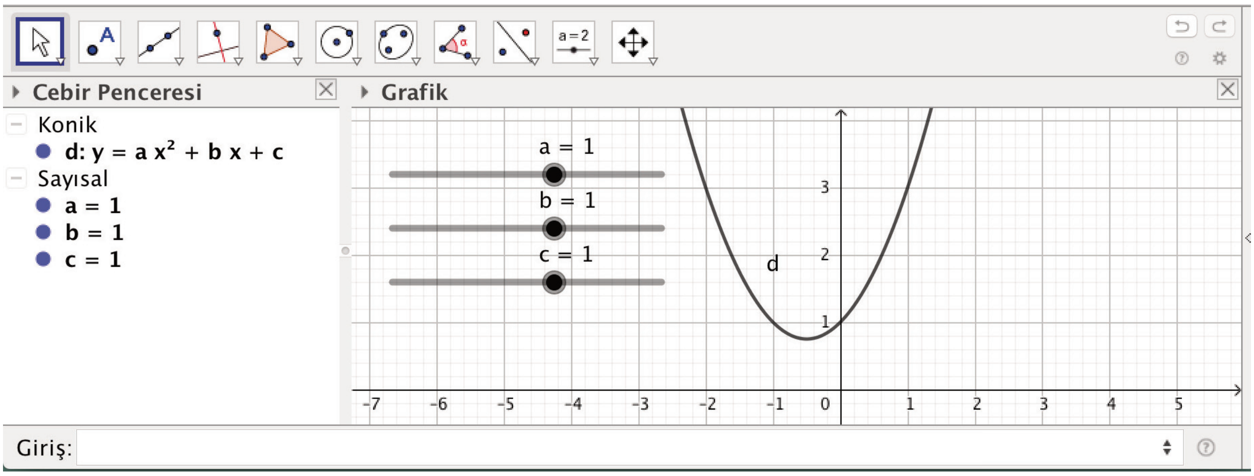
$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 5 \cdot (x-1) \cdot (x+4)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Örnek 17

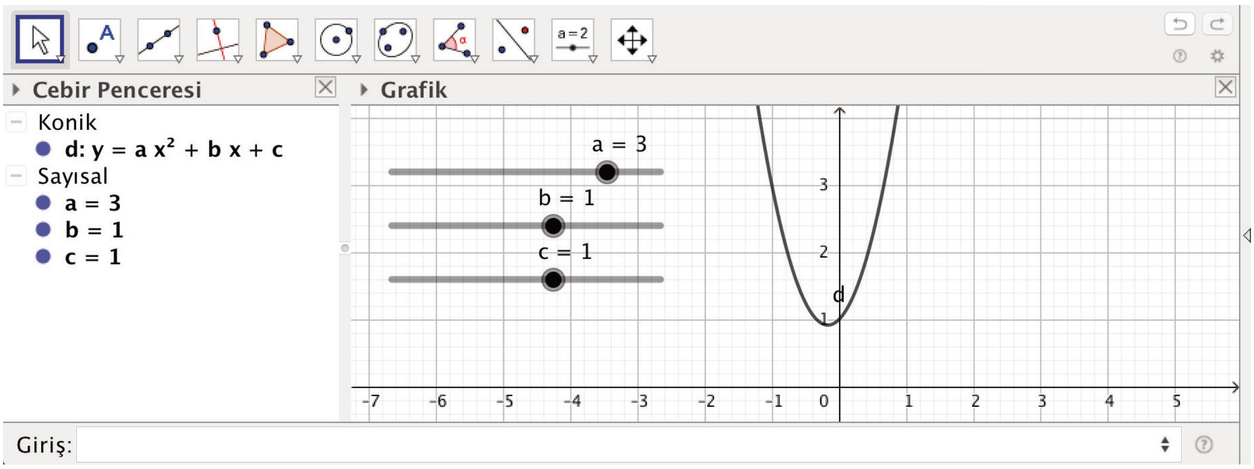
Dinamik matematik yazılımını kullanarak $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonundaki a, b ve c katsayıları değiştirildiğinde grafikte nasıl bir değişim olduğunu gösteriniz.

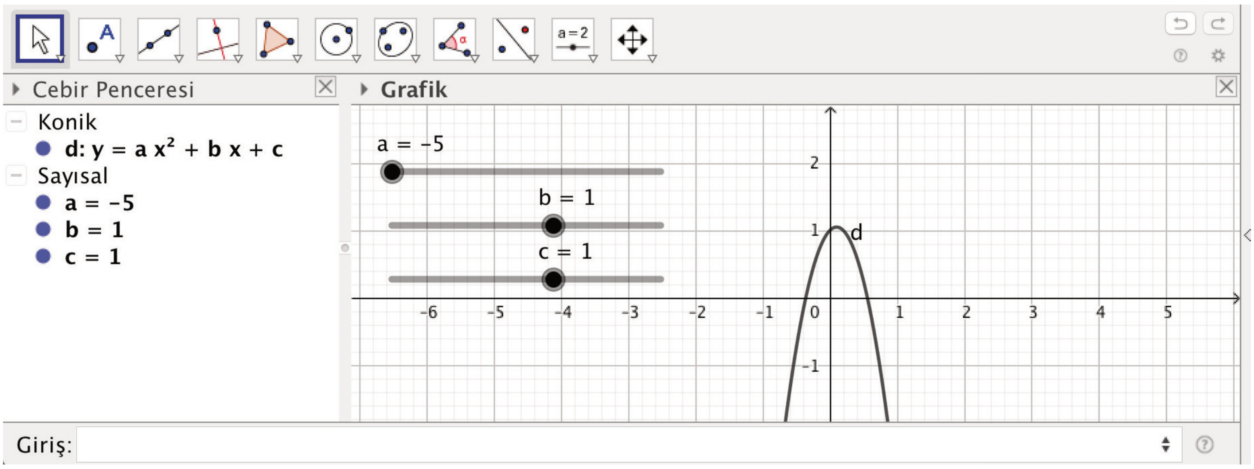
Çözüm

Dinamik matematik yazılımını açarak “Giriş” bölümüne $ax^2 + bx + c$ yazınız ve “ENTER” tuşuna basınız. Ekranda beliren kutuda “Sürgüler Oluştursun mu?” butonuna basınız. Böylece grafik penceresinde $a = 1,\ b = 1$ ve $c = 1$ sürgüleri ile oluşturulan $f(x) = x^2 + x + 1$ fonksiyonunun grafiğini göreceksiniz.



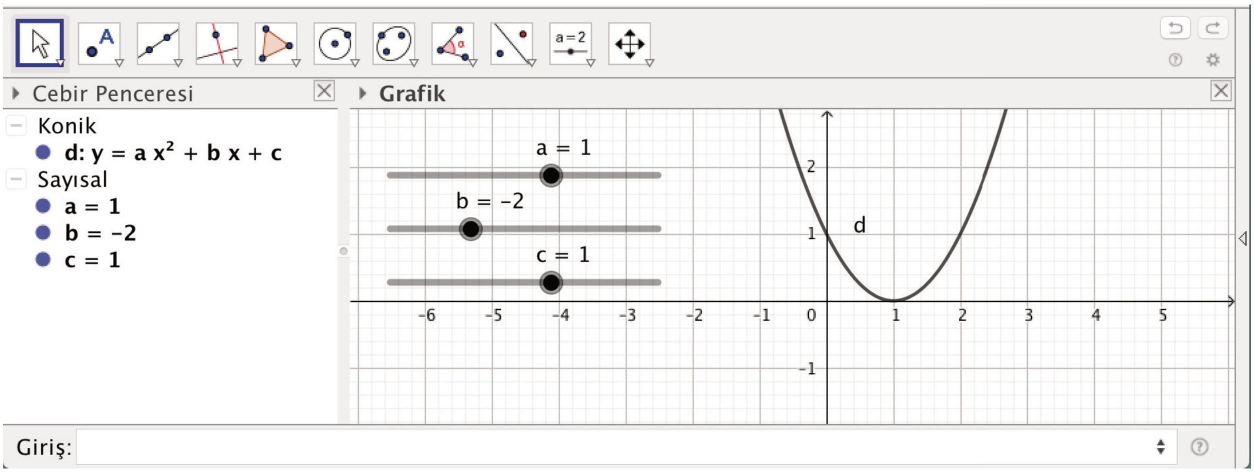
a sürgüsü $a = 0$ konumunda iken doğru oluştuğunu, $a > 0$ için a değeri arttıkça parabolün kollarının y eksenine yaklaştığını, $a < 0$ için a değeri azaldıkça parabolün kollarının y eksenine yaklaştığı görülür. Bu durumda $|a|$ büyüdükçe parabolün kolları y eksenine yaklaşmaktadır.

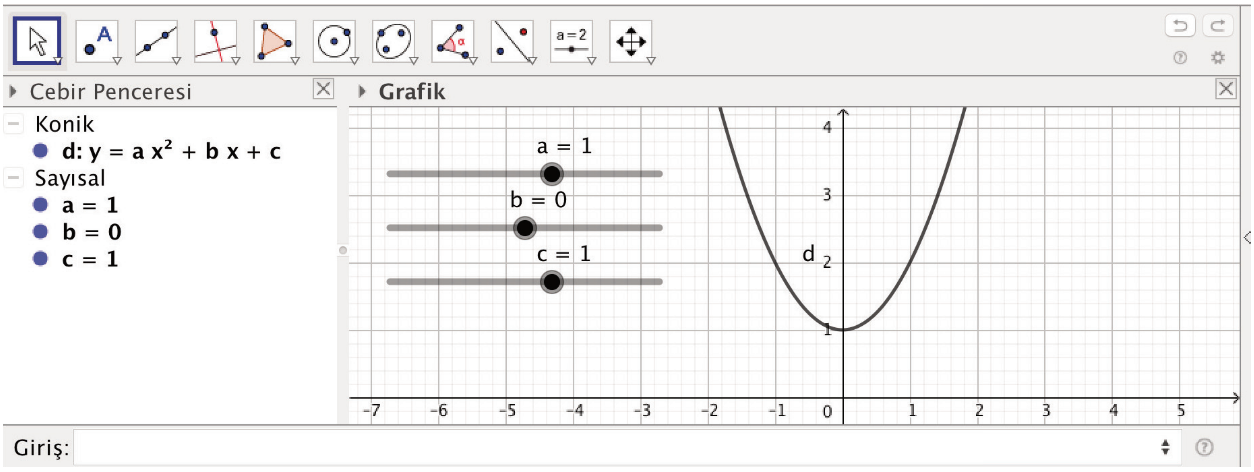


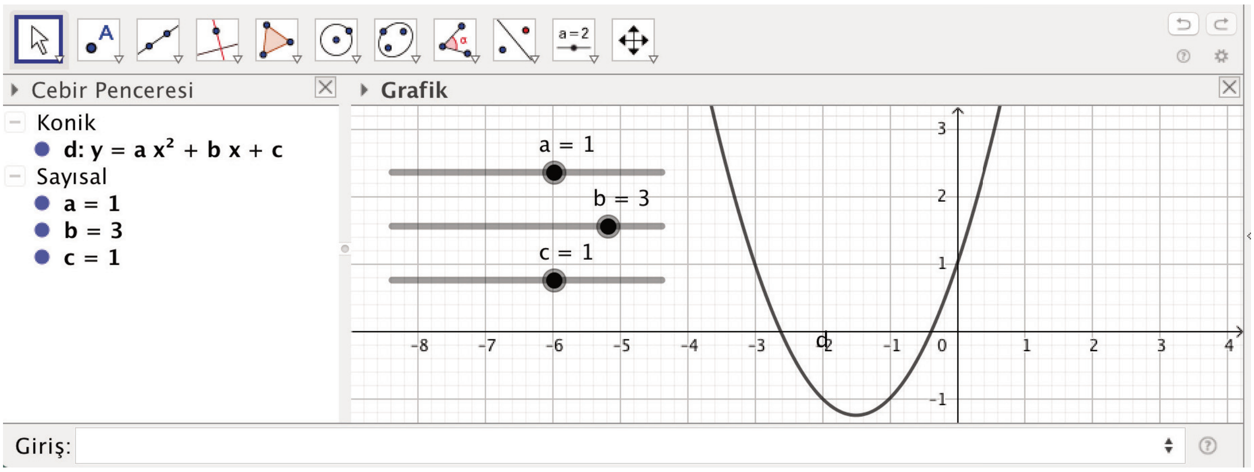


Sonuç olarak a’nın değişmesi parabolün kollarının açıklığını ve yönünü değiştirir.

y eksenini kestiği nokta $(0, c)$ olduğuna göre b sürgüsü hareket ettirilirse parabolün sadece c’ye bağlı değiştiği görülür. a ve b’nin değişmesinin y eksenini kestiği noktayı değiştirmediği görülür.

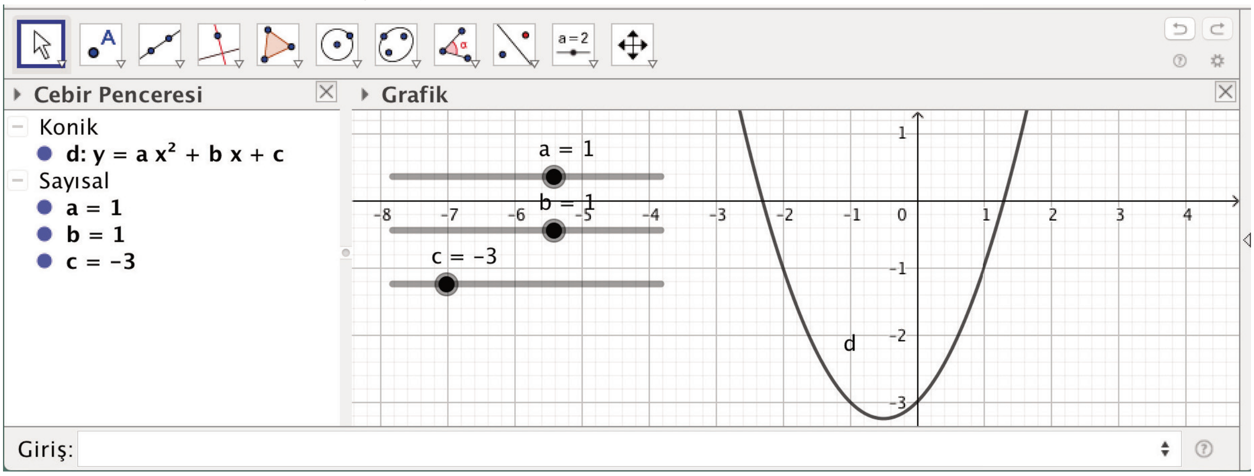


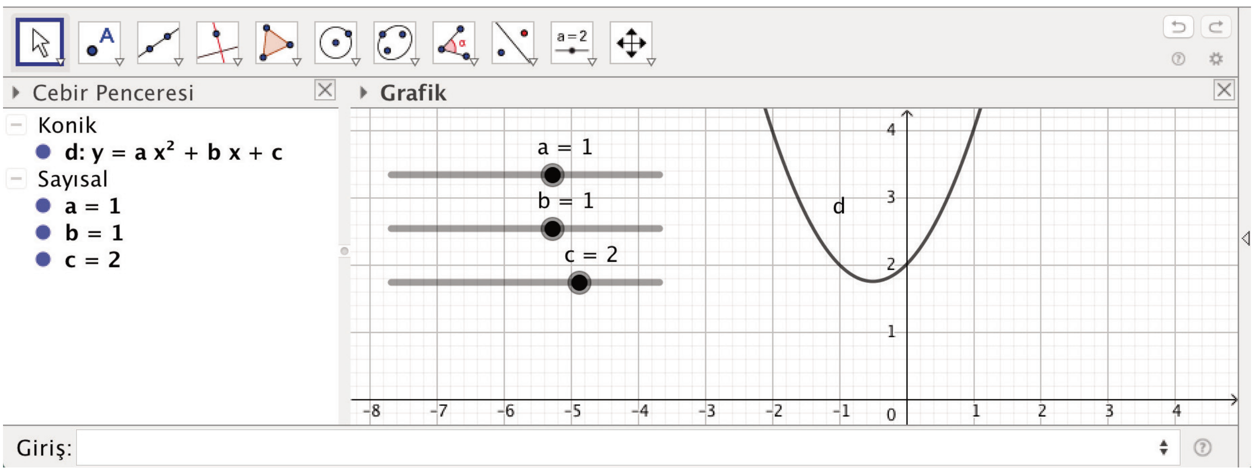




Sonuç olarak b'nin değişmesi parabolün tepe noktasının değişmesini sağlarken y eksenini kestiği noktayı değiştirmez.

c sürgüsü hareket ettirilirse parabolün kollarındaki açıklığın değişmeden yukarı aşağı hareket ettiği yani y eksenini kestiği noktanın değiştiği görülür.





Sonuç olarak c'nin değişmesi parabolün y eksenini kestiği noktayı değiştirir.

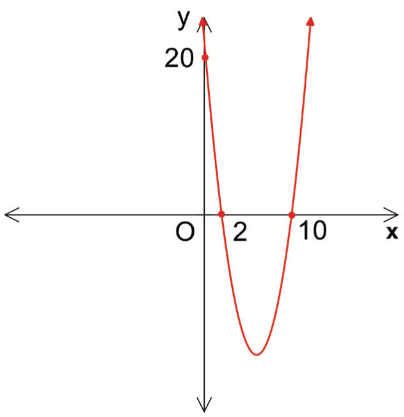
Grafiği Üzerindeki Bazı Noktaları Verilen İkinci Dereceden Fonksiyonu Oluşturma

İpucu

$a \neq 0$, a, b, $c \in \mathbb{R}$ için $f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolünün x eksenini kestiği noktaların apsisleri x_1, x_2 ve y eksenini kestiği nokta (0, c) olan fonksiyon $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ olur. Buradan $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ fonksiyonunda (0, c) noktası yerine yazılarak a değeri bulunur.

$a \neq 0$ ve a, b, $c \in \mathbb{R}$ için $f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolünün tepe noktası $T(r, k)$, parabolün geçtiği diğer bir nokta $B(x_1, y_1)$ olmak üzere $f(x) = a \cdot (x - r)^2 + k$ fonksiyonunda $B(x_1, y_1)$ noktası yerine yazılarak a değeri bulunur.

Örnek 19



Yandaki şekilde eksenleri kestiği noktaları verilen parabole ait fonksiyonu bulunuz.

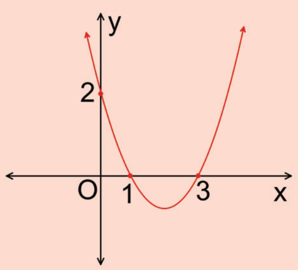
Çözüm

x eksenini kestiği noktaların apsisi $x_1 = 2$ ve $x_2 = 10$ olduğundan $y = a \cdot (x - 2) \cdot (x - 10)$ fonksiyonu elde edilir. y eksenini kestiği nokta olan $(0, 20)$ kullanılarak

$y = a \cdot (x - 2) \cdot (x - 10) \Rightarrow 20 = a \cdot (0 - 2) \cdot (0 - 10) \Rightarrow 20 = a \cdot (-2) \cdot (-10) \Rightarrow a = 1$ olur.

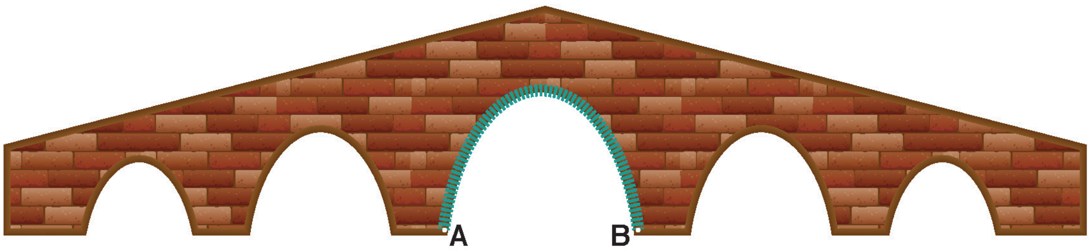
Sonuç olarak verilen parabole ait fonksiyon $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = (x - 2) \cdot (x - 10) = x^2 - 12x + 20$ olur.

Sıra Sizde



Yandaki şekilde eksenleri kestiği noktaları verilen parabole ait fonksiyonu bulunuz.

Örnek 20



Belediye, tarihî Taşköprü'nün parabol şeklindeki A ile B'nin bulunduğu ayaklarının arasını led ışıklarla aydınlatmak istemektedir. Dikkat çekici olması için ardışık ledler sırasıyla soldan sağa doğru yanıp sönmektedir. Bu ledlerle ilgili aşağıdaki bilgiler veriliyor:

I. A noktası orijin olmak üzere x geçen süre, y yanan ledin yerden yüksekliği kabul ediliyor.

II. Işık A ile B arasını 6 saniyede akarak tamamlamaktadır.

III. 1 ve 2. saniyeler arası ışığın yerden yüksekliğinin ortalama değişim hızı 11m/sn. dir.

Buna göre

a) Işığın izlediği yolun denklemini bulunuz.
b) 4 ve 5. saniyeler arasında ışığın yerden yüksekliğinin ortalama değişim hızını bulunuz.

Çözüm

a) A noktası orijin olduğundan B noktasının koordinatı $(6, 0)$ olur. Eksenleri kesen parabol denkleminden $f(x) = a\cdot(x-0)\cdot(x-6)$ bulunur. 1 ve 2. saniyeler arası ışığın yerden yüksekliğinin ortalama değişim hızından $\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = 11 \Rightarrow f(2)-f(1) = 11$ olur. Buradan

$$a\cdot(2-0)\cdot(2-6) - a(1-0)\cdot(1-6) = 11$$
$$2a\cdot(-4) - a\cdot(-5) = 11$$
$$-8a + 5a = 11$$
$$-3a = 11$$
$$a = -\frac{11}{3} \text{ bulunur.}$$

Bu değer $f(x) = a\cdot(x-0)\cdot(x-6)$ denkleminde yerine yazılırsa

$$f(x) = -\frac{11}{3}(x-0)\cdot(x-6) = -\frac{11}{3}x^2 + 22x \text{ elde edilir.}$$

b) $$\frac{f(5)-f(4)}{5-4} = \frac{\left(-\frac{11}{3}\cdot 5^2 + 22\cdot 5\right) - \left(-\frac{11}{3}\cdot 4^2 + 22\right)}{1}$$
$$= -\frac{275}{3} + 110 + \frac{176}{3} - 22$$
$$= 55 \text{ m/sn. bulunur.}$$

Örnek 21

y eksenini kestiği nokta $(0,\ 12)$ ve üzerindeki herhangi iki nokta $(-3,\ 12)$ ile $(2,\ -18)$ olan parabole ait fonksiyonu bulunuz.

Çözüm

$f(x) = ax^2 + bx + c$ olsun. Parabolün y eksenini kestiği noktanın ordinatı 12 olduğundan $c = 12$ olup buradan $f(x) = ax^2 + bx + 12$ yazılır.
$(-3,\ 12)$ noktası parabol üzerinde olduğundan $x = -3$ ve $y = 12$ değerleri fonksiyonda yerine yazılırsa
$y = ax^2 + bx + 12 \Rightarrow 12 = a\cdot(-3)^2 + b\cdot(-3) + 12$
$\Rightarrow 12 = a\cdot 9 - 3b + 12$
$\Rightarrow 9a - 3b = 0 \Rightarrow 3a - b = 0$ olur. ...I

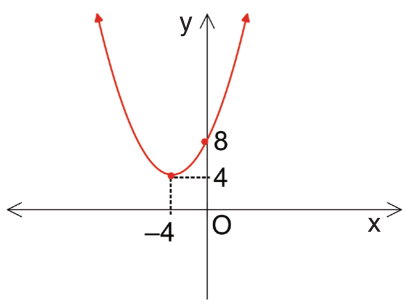
$(2,\ -18)$ noktası parabol üzerinde olduğundan $x = 2$ ve $y = -18$ değerleri fonksiyonda yerine yazılırsa
$y = ax^2 + bx + 12 \Rightarrow -18 = a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + 12$
$\Rightarrow -18 = 4a + 2b + 12$
$\Rightarrow 4a + 2b = -30 \Rightarrow 2a + b = -15$ olur. ...II

I ve II numaralı denklemlerin ortak çözümünden

$$\begin{array}{rl} & 3a - b = 0 \\ + & 2a + b = -15 \\ \hline & 5a = -15 \Rightarrow a = -3 \text{ ve } b = -9 \text{ bulunur.} \end{array}$$

Buradan verilen parabole ait fonksiyon $f(x) = -3x^2 - 9x + 12$ olur.

Örnek 22

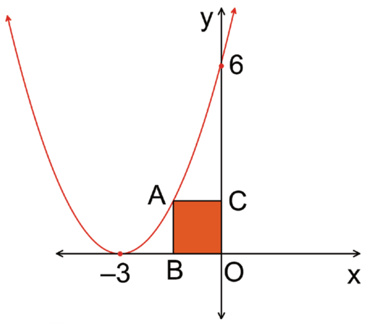


Yandaki şekilde verilen parabolün tepe noktası $T(-4,\ 4)$ ve y eksenini kestiği noktanın ordinatı 8'dir. Buna göre verilen parabole ait fonksiyonu bulunuz.

Çözüm

Tepe noktası $T(-4,\ 4)$ ise $r = -4$ ve $k = 4$ olup bu değerler $y = a\cdot(x - r)^2 + k$ denkleminde yerine yazılırsa $y = a\cdot(x - (-4))^2 + 4 = a\cdot(x + 4)^2 + 4$ bulunur.
Parabolün y eksenini kestiği $(0,\ 8)$ noktası $y = a\cdot(x + 4)^2 + 4$ denklemini sağlayacağından
$8 = a\cdot(0 + 4)^2 + 4 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$ olur. Bu durumda verilen parabole ait fonksiyon $y = \frac{1}{4}(x + 4)^2 + 4$ olur.

Örnek 23



Tepe noktası $T(-3, 0)$ ve y eksenini $(0, 6)$ noktasında kesen şekildeki parabolde A noktası parabolün üzerindedir. ABOC dörtgeni kare olduğuna göre A(ABOC)'nın kaç birimkare olduğunu bulunuz.

Çözüm

Tepe noktası $T(-3, 0)$ ise $y = a \cdot (x+3)^2 + 0$ olup $(0, 6)$ noktası parabolün üzerinde olduğundan $x = 0$ ve $y = 6$ değerleri $y = a \cdot (x+3)^2 + 0$ denkleminde yerine yazılırsa $6 = a \cdot (0+3)^2 + 0 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$ bulunur. Buradan parabole ait fonksiyon $y = \frac{2}{3} \cdot (x+3)^2$ olur. ABOC kare olduğundan $|BO| = |OC| = n$ birim olsun. Bu durumda $n > 0$ olmak üzere $C(0, n)$, $B(-n, 0)$ ve $A(-n, n)$ elde edilir. A noktası parabolün üzerinde olduğundan $y = \frac{2}{3} \cdot (x+3)^2$ denklemini sağlar. Buradan

$$n = \frac{2}{3}(-n+3)^2 \Rightarrow n = \frac{2}{3}(n^2 - 6n + 9) \Rightarrow 3n = 2n^2 - 12n + 18$$

$$\Rightarrow 2n^2 - 15n + 18 = 0$$

$$\Rightarrow (2n-3) \cdot (n-6) = 0 \Rightarrow n = \frac{3}{2} \text{ veya } n = 6 \text{ olup } B\left(-\frac{3}{2}, 0\right) \text{ veya } B(-6, 0)$$

olabilir ancak noktasının apsisi -3'ten büyük olacağından $n = \frac{3}{2}$ olur. Buradan

$A(ABOC) = n^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ birimkaredir.

Sıra Sizde

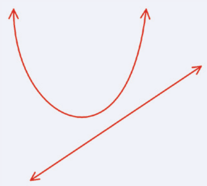
Tepe noktası $T(2, 9)$ olan ve y eksenini $(0, 5)$ noktasında kesen parabolün tepe noktasını ve x eksenini kestiği noktaları köşe kabul eden üçgenin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

Doğru ile Parabolün Durumları

Bilgi

$y = ax^2 + bx + c$ parabolü ile $y = mx + n$ doğrusu verilmiş olsun. (x, y) parabol ile doğrunun ortak bir noktasıysa her iki denklemi de sağlamalıdır. Her iki denklemi sağlayan x değerini bulmak için denklemler $ax^2 + bx + c = mx + n$ biçiminde eşitlenir. Elde edilen $ax^2 + (b - m)x + c - n = 0$ ikinci derece denklemin diskriminantı Δ olsun.

1) $\Delta < 0$ ise parabol ile doğru kesişmez.



2) $\Delta = 0$ ise parabol ile doğru yalnız bir noktada kesişir.

3) $\Delta > 0$ ise parabol ile doğru farklı iki noktada kesişir.

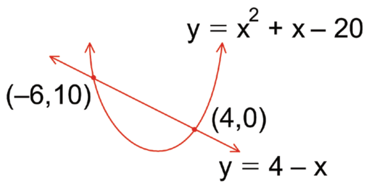
$ax^2 + (b - m)x + c - n = 0$ denkleminin gerçek kökleri varsa parabol ile doğrunun kesiştiği noktalardır.

Örnek 24

$y = x^2 + x - 20$ parabolü ile $y = 4 - x$ doğrusunun birbirine göre durumlarını inceleyiniz.

Çözüm

$y = x^2 + x - 20$ parabolü ile $y = 4 - x$ doğrusu eşitlenip diskriminantı alınarak köklerin varlığı araştırılır.
$x^2 + x - 20 = 4 - x \Rightarrow x^2 + 2x - 24 = 0$ olup $\Delta = (2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24) = 100 > 0$ olduğundan verilen parabol ile doğru farklı iki noktada kesişir. Bu noktalar,



$x^2 + 2x - 24 = 0 \Rightarrow (x + 6) \cdot (x - 4) = 0 \Rightarrow x = -6$ ve $x = 4$ bulunur.
Bu noktalar parabol ile doğrunun kesiştiği noktaların apsisleridir.
$x = -6$ ve $x = 4$ noktaları her iki grafiği de sağlayacağından herhangi birinde yerine yazılarak kesiştikleri noktaların ordinatları bulunur. Doğrunun belirttiği denklem olan $y = 4 - x$ kullanılarak $x = -6 \Rightarrow y = 10$ ve $x = 4 \Rightarrow y = 0$ olur.

Örnek 25

$y = mx - 1$ doğrusu $y = x^2 - 2x$ parabolüne teğet olduğuna göre m'nin alabileceği değerleri bulunuz.

Çözüm

$y = mx - 1$ doğrusu $y = x^2 - 2x$ parabolüne teğet olduğundan
$x^2 - 2x = mx - 1 \Rightarrow x^2 - (2 + m)x + 1 = 0$ denklemi için $\Delta = 0$ olmalıdır. Buradan
$\Delta = (-(2 + m))^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow (2 + m)^2 = 4 \Rightarrow m + 2 = 2$ veya $m + 2 = -2$
$m = 0$ veya $m = -4$ olur.

Örnek 26

$y = x^2 - 4x + c$ parabolü ile $y = 2x + n$ doğrusu farklı iki noktada kesişiyorsa kesiştikleri noktaların apsisleri toplamını bulunuz.

Çözüm

$x^2 - 4x + c = 2x + n \Rightarrow x^2 - 6x + c - n = 0$ olup parabol ile doğru farklı iki noktada kesiştiklerinden $x^2 - 6x + c - n = 0$ denkleminin kökleri, kesiştikleri noktaların apsisleridir.

Bu denklemin kökleri x_1 ve x_2 ise apsisler toplamı $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{(-6)}{1} = 6$ olur.

ALIŞTIRMALAR

1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ parabolü ile $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -9x + 4$ doğrusunun kesişme noktalarının koordinatlarını bulunuz.

2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 7$ parabolü ile $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + a$ doğrusu birbirine teğet olduğuna göre a gerçek sayısının değerini bulunuz.

3. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + a$ parabolü ile $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -2x + 1$ doğrusunun kesişmemesi için a'nın alabileceği **en küçük** tam sayı değerini bulunuz.

4. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x - m + 6$ fonksiyonunun **en küçük** değeri 6 olduğuna göre m gerçek sayısının değerini bulunuz.

5. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + 12x - b + 7$ parabolü x eksenine teğet olduğuna göre b gerçek sayısının değerini bulunuz.

6. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \neq 0$ ve $f(x) = ax^2 - (3k - 6)x + 12$ parabolünün tepe noktası y ekseni üzerinde olduğuna göre k gerçek sayısının değerini bulunuz.

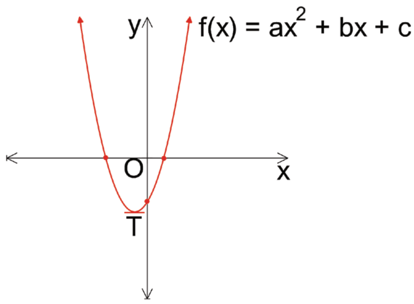
7. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-7x+12$ parabolünün eksenleri kestiği noktaların koordinatlarını bulunuz.

8. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-2x^2-4x+1$ parabolünün **en büyük** değerini bulunuz.

9. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-(a-1)x+3a-1$ parabolünün simetri ekseni $x=2$ olduğuna göre tepe noktasının koordinatları toplamını bulunuz.

10. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-2\cdot(x-a)^2+b-3$ parabolünün tepe noktası $T(-3,\ 1)$ olduğuna göre $a\cdot b$ ifadesinin değerini bulunuz.

11.



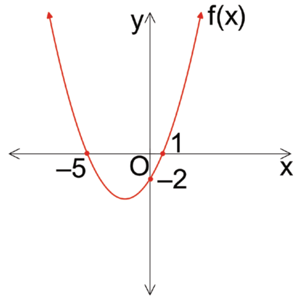
Yukarıda grafiği verilen f fonksiyonu için aşağıda verilen bilgilerden hangisi ya da hangilerinin daima doğru olduğunu bulunuz.

I. $c<0$
II. $a\cdot b-c>0$
III. $\Delta<0$

12. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(a-1)x^2-6x+3$ parabolü x eksenini kesmediğine göre a'nın alabileceği **en küçük** tam sayı değerini bulunuz.

13. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-4x-5$ parabolünün görüntü kümesi A; $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=-x^2+6x-7$ fonksiyonunun görüntü kümesi B olduğuna göre $A\cap B$ kümesini bulunuz.

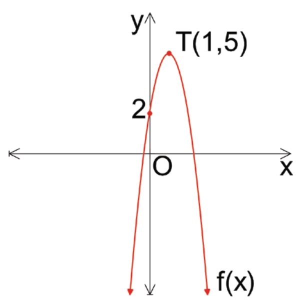
14.



Yukarıda grafiği verilen f fonksiyonu için aşağıda verilen bilgilerden hangisi ya da hangilerinin doğru olduğunu bulunuz.

I. $f(5)\cdot f(-3)<0$
II. $f(2)-f(-6)=0$
III. Fonksiyonun en küçük değeri $\frac{-16}{5}$'dır.

15.



Yukarıda grafiği verilen f(x) parabolünün denklemini bulunuz.

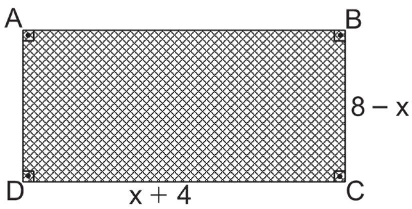
16. $y=2x^2-5x+3$ parabolü ile $y=x-2$ doğrusunun durumunu inceleyiniz.

11.3.2.2. İkinci Dereceden Fonksiyonlarla Modellenebilen Örnek Problemler

Örnek 27

Farklı kenar uzunlukları $(x+4)$ cm ve $(8-x)$ cm olan dikdörtgensel bölgenin alanının **en çok** kaç cm^2 olabileceğini bulunuz.

Çözüm



$A(ABCD)=(x+4)\cdot(8-x)=(-x^2+4x+32)$ cm^2 olur. Bu durumda $A(ABCD)$ x'e bağlı bir fonksiyon olup $a=-1<0$ olduğundan en büyük değeri $-x^2+4x+32$ ifadesinin tepe noktasının ordinatıdır.

Tepe noktası $T(r, k)$ ise $r=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{4}{2\cdot(-1)}=2$ ve

$k=f(2)=-(2)^2+4\cdot(2)+32=36$ bulunur. Buradan

$A(ABCD)$ en çok 36 cm^2 olur.

Örnek 28

Çevresi 1500 metre olan dikdörtgen şeklindeki bir tarlaya buğday ekilecektir. 1 dönümden ortalama 400 kg buğday elde ediliyorsa bu tarladan **en çok** kaç ton buğday elde edilebileceğini bulunuz.

Çözüm

Ekili alan ne kadar fazla ise elde edilecek buğday o kadar fazla olacaktır. Dikdörtgen şeklindeki tarlanın eni x metre olsun. Bu durumda yarı çevre 750 m olduğundan tarlanın boyu $(750-x)$ metre olup alanı $A(x)=(x)\cdot(750-x)=-x^2+750x$ bulunur. x^2 nin katsayısı $-1<0$ olduğundan parabolün kolları aşağı doğru olup tepe noktasının ordinatı fonksiyonun en büyük değeri olur. Buradan parabolün tepe noktası $T(r, k)$ ise $r=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{750}{2\cdot(-1)}=375$ ve en büyük değer $k=f(375)=(375)\cdot(750-375)=140\,625$ olur. Bu durumda ekili alan en fazla 140 625 m^2 olmaktadır.

1dönüm 1000 m^2 olduğundan elde edilebilecek buğday en fazla

$$\frac{1000\ m^2}{140\,625\ m^2}=\frac{400\ kg}{a\ kg}\Rightarrow a=\frac{400\ kg\cdot 140\,625\ \cancel{m^2}}{1000\ \cancel{m^2}}\Rightarrow a=56\,250\ kg\Rightarrow a=56{,}25\ ton\ olur.$$

Örnek 29

Bir otomobilin hızı V ile gösterilmek üzere 100 km mesafede kaç gram karbondioksit salınımı yaptığı hızına bağlı olarak $f(V)=0{,}025\cdot V^2$ olarak ölçülmüştür. Bu aracın 100 km mesafede hız aralığı km cinsinden $[30, 120]$ için **en az** ve **en çok** kaç gram karbandioksit salınımı yapacağını bulunuz.

Çözüm

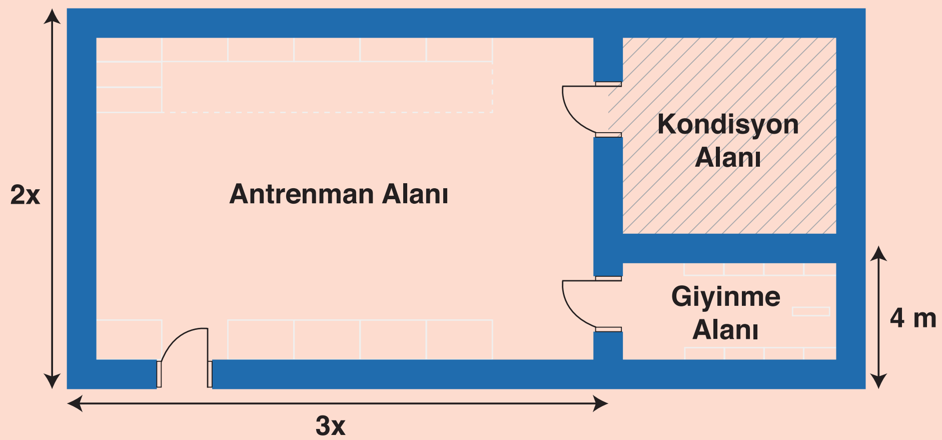
$f(v) = 0,025 \cdot V^2$ fonksiyonunda tepe noktası $T(r, k)$ ise

$r = -\dfrac{0}{2 \cdot (0,025)} = 0$ ve $k = f(0) = 0,025 \cdot 0^2 = 0$ olmak üzere $T(0, 0)$ bulunur. Tepe noktasının apsisi olan $V = 0$ km/sa., $[30, 120]$ kümesinin elemanı olmadığından $f(30)$ en düşük karbondioksit salınımını, $f(120)$ ise en fazla karbondioksit salınımını verir.

$f(30) = 0,025 \cdot (30)^2 = 22,5$ gram ve $f(120) = 0,025 \cdot (120)^2 = 360$ gram olur.

Sıra Sizde

Ampute Milli Futbol Takımı



Çevresi 120 m olan dikdörtgen şeklindeki alana Ampute Milli Futbol Takımı için yapılan spor salonunun boyutları yukarıdaki şekilde verilmiştir. Kondisyon için ayrılan bölümün alanının **en çok** kaç m^2 olabileceğini bulunuz.

Örnek 30

Bir malın alış fiyatı x Türk lirası $(x \geq 6)$, satış fiyatı y Türk lirası ile gösterilmek üzere $y = -x^2 + 25x - 100$ olduğuna göre bu malın satışından elde edilebilecek kârın **en fazla** kaç Türk lirası olabileceğini bulunuz.

Çözüm

Alış fiyatı olan x'e göre kâr fonksiyonu K(x) olsun. $K(x) = y - x = -x^2 + 25x - 100 - x = -x^2 + 24x - 100$ bulunur. K(x) fonksiyonunda $a = -1 < 0$ olduğundan en büyük değer vardır ve bu değer kârın en çok olduğu durumdur. Parabolün tepe noktası $T(r, k)$ ise

$r = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{24}{2 \cdot (-1)} = 12$ ve $k = f(12) = -(12)^2 + 24 \cdot 12 - 100 = 44$ olup bu malın satışından elde edilen kâr en fazla 44 Türk lirası olur.

Örnek 31

Havaya atılan bir cismin t saniye sonra yerden kaç metre yüksekte olduğunu gösteren fonksiyon $f(t) = -t^2 + 9t + 10$ olarak verilmiştir.

a) Cismin yerden yüksekliğinin kaçıncı saniyelerde 18 metre olacağını bulunuz.

b) Cismin en çok kaç metre yükselebileceğini bulunuz.

Çözüm

a) $f(t) = 18 \Rightarrow -t^2 + 9t + 10 = 18 \Rightarrow -t^2 + 9t - 8 = 0$ olup $\triangle = 81 - 4 \cdot (-1) \cdot (-8) = 49$ olur. Buradan denklemin kökleri t_1 ve t_2 olmak üzere

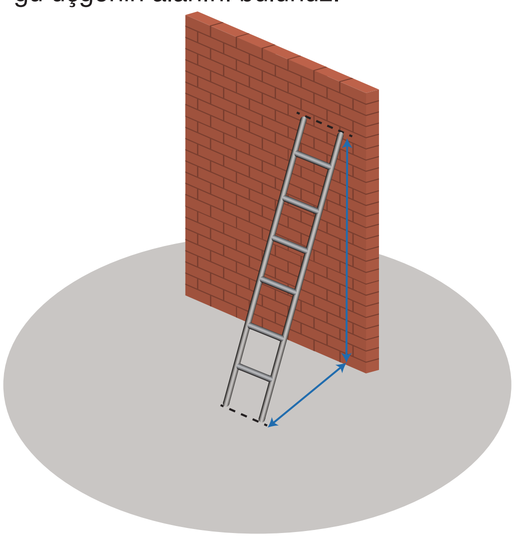
$t_1 = \dfrac{-9-\sqrt{49}}{2 \cdot (-1)} = \dfrac{-9-7}{-2} = 8$ veya $t_2 = \dfrac{-9+\sqrt{49}}{2 \cdot (-1)} = \dfrac{-9+7}{-2} = 1$ bulunur. Dolayısıyla 1 ve 8. saniyelerde topun yerden yüksekliği 18 metredir.

b) $f(t) = -t^2 + 9t + 10$ fonksiyonunda $a = -1 < 0$ olduğundan en büyük değer vardır ve bu değer fonksiyonun tepe noktasının ordinatıdır. Tepe noktası $T(r, k)$ ise

$r = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{9}{2 \cdot (-1)} = \dfrac{9}{2}$ ve $k = f\left(\dfrac{9}{2}\right) = -\left(\dfrac{9}{2}\right)^2 + 9 \cdot \left(\dfrac{9}{2}\right) + 10 = \dfrac{121}{4}$ bulunur. Dolayısıyla cismin yerden yüksekliği en fazla $\dfrac{121}{4}$ metre olur.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki şekilde verilen düz zeminde dik duvara dayalı merdivenin boyu 10 metredir. Duvar ile merdivenin oluşturduğu dik üçgenin dik kenarlarının uzunlukları toplamı 14 metre olduğuna göre duvar ile merdivenin oluşturduğu üçgenin alanını bulunuz.



2. 120 cm uzunluğundaki çıtadan dikdörtgen şeklinde ve **en büyük** alanlı bir resim çerçevesi yapılacaktır. Çerçevenin alanının kaç santimetrekare olduğunu bulunuz.

3. Dikdörtgen şeklinde ve çevresi 160 metre olan bir araziye halı saha yapılıp zemini suni çim ile kaplanacaktır. Suni çimin metrekare fiyatı 50 Türk lirasıdır. Buna göre bu arazinin üzerine yapılan halı sahanın alanı **en büyük** olduğunda suni çim için kaç Türk lirası ödenmesi gerektiğini bulunuz.

11.3.3. Fonksiyonların Dönüşümleri

Terimler ve Kavramlar

- Öteleme
- Simetri
- Dönüşüm

Neler Öğreneceksiniz?

- Bir fonksiyonun grafiğinden dönüşümler yardımıyla yeni fonksiyon grafikleri elde etmeyi öğreneceksiniz.

11.3.3.1. Bir Fonksiyonun Grafiğinden Dönüşümler Yardımı İle Yeni Fonksiyon Grafikleri Elde Etme

Tek ve Çift Fonksiyonların Grafikleri

Bilgi

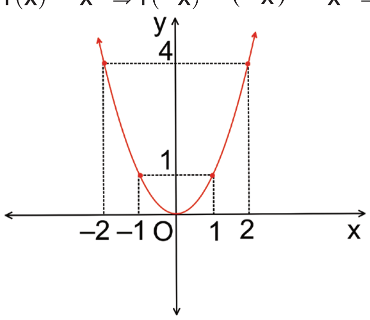
- Tek fonksiyon grafikleri orijine göre simetriktir.
- Çift fonksiyonların grafikleri y eksenine göre simetriktir.

Örnek 1

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2$ fonksiyonunun grafiğini çizerek nasıl bir simetri özelliği olduğunu belirtiniz.

Çözüm

$f(x)=x^2 \Rightarrow f(-x)=(-x)^2=x^2 \Rightarrow f(-x)=f(x)$ olup verilen fonksiyon çift fonksiyondur.



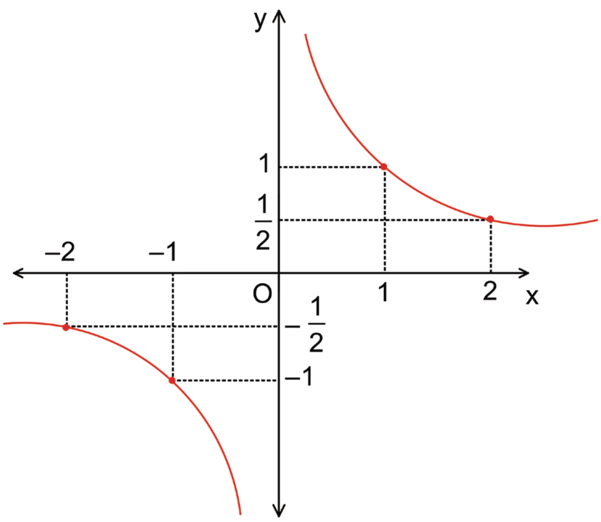
$f(x)=x^2$ fonksiyonunun grafiği üzerinde bazı noktalar yanda verilen şekildeki gibi gösterildiğinde f fonksiyonun grafiğinin y eksenine göre simetrik olduğu görülür.

Örnek 2

$f: \mathbb{R}-\{0\} \rightarrow \mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x}$ fonksiyonunun simetrik olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm

$f(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f(-x)=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}=-f(x) \Rightarrow f(-x)=-f(x)$ olup verilen fonksiyon tek fonksiyondur.



$f(x)=\frac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiği üzerinde bazı noktalar yanda verilen şekildeki gibi gösterildiğinde grafiğin orijine göre simetrik olduğu görülür.

Örnek 3

Grafiği orijine göre simetrik olan $y=f(x)$ fonksiyonu ile grafiği y eksenine göre simetrik olan $y=g(x)$ fonksiyonu için $f(1)=3$ ve $g(-2)=4$ olduğuna göre $f(-1)-g(2)$ ifadesinin değerini bulunuz.

Çözüm

$y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği orijine göre simetrik olduğundan tek fonksiyon olup $f(-x)=-f(x)$ bulunur. Buradan $f(-1)=-f(1)=-3$ olur.
$y=g(x)$ fonksiyonunun grafiği y eksenine göre simetrik olduğundan çift fonksiyon olup $g(-x)=g(x)$ bulunur. Buradan $g(2)=g(-2)=4$ olur. Dolayısıyla $f(-1)-g(2)=-3-4=-7$ elde edilir.

Sıra Sizde

$y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği y eksenine göre simetrik ve $2f(x)=-9\cdot|x|-f(-x)$ olduğuna göre $f(-4)$ ifadesinin değerini bulunuz.

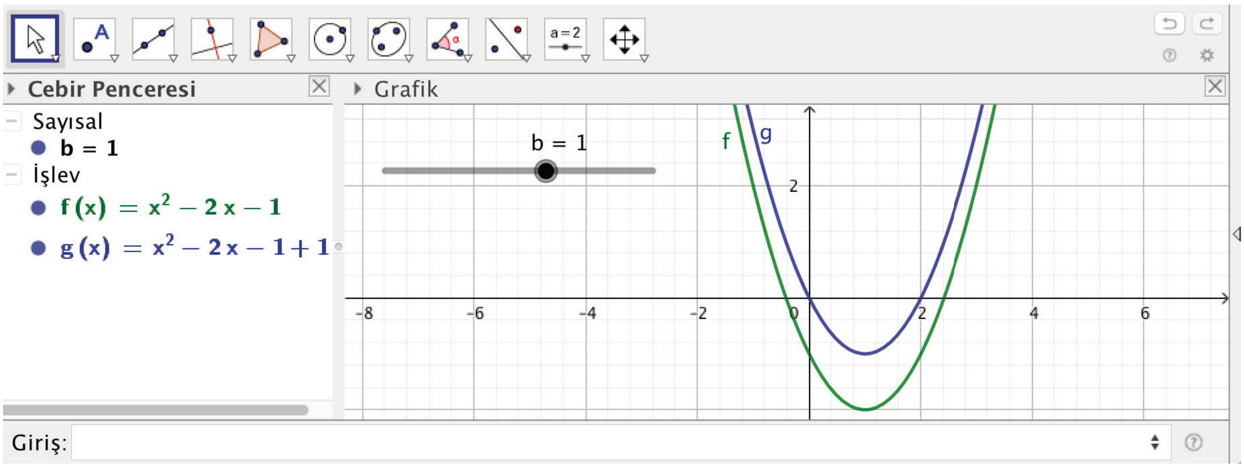
y = f(x) + b Dönüşümü

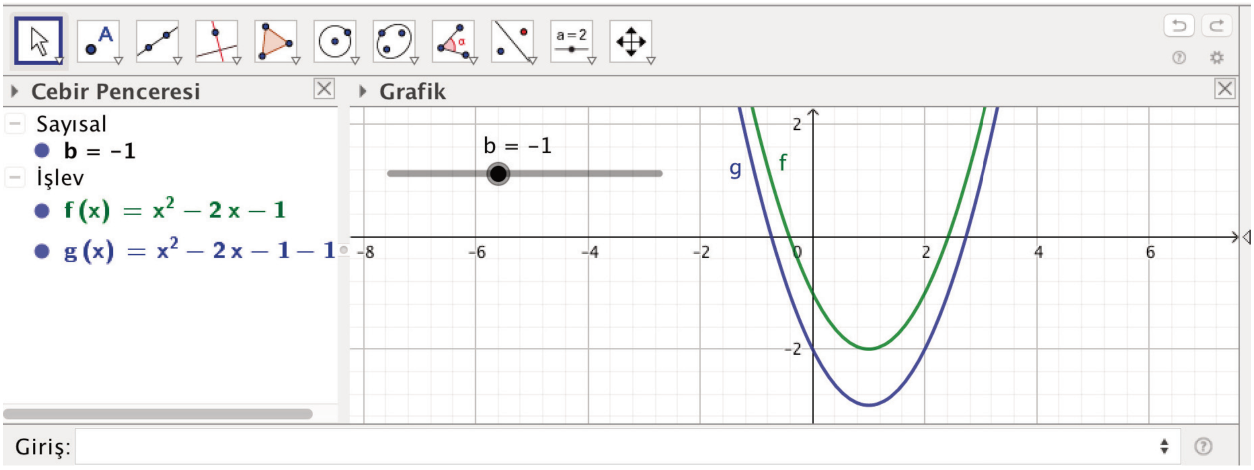
Örnek 4

Dinamik matematik yazılımını kullanarak $f(x) = x^2 - 2x - 1$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz. $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $y = f(x) + b$ dönüşümünün grafiği ile $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğini karşılaştırınız.

Çözüm

Dinamik matematik yazılımını açınız ve "Giriş" bölümüne $x^2 - 2x - 1$ yazarak "ENTER" tuşuna basınız. Böylece ekranda $f(x) = x^2 - 2x - 1$ fonksiyonun grafiği görülecektir.
"Giriş" bölümüne $f(x) + b$ yazarak "ENTER" tuşuna basınız. Ekranda beliren kutuda "Sürgüler Oluştursun mu?" butonuna basınız. Böylece ekranda $b = 1$ sürgü değeri için $y = f(x) + 1$ fonksiyonu görülecektir.
b sürgüsü 1 iken $y = f(x) + 1$ fonksiyonunun grafiğinin $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine göre y ekseni boyunca 1 birim yukarı ötelendiği görülür.





b sürgüsü -1 iken $y = f(x) - 1$ fonksiyonunun grafiğinin $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine y ekseni boyunca 1 birim aşağı ötelendiği görülür.
Sonuç olarak $b > 0$ ise $y = f(x) + b$ dönüşümü fonksiyonun belirttiği grafiğin y ekseni boyunca b birim yukarı, $b < 0$ ise $|b|$ birim aşağı ötelenir.

İpucu

$y = f(x) + b$ fonksiyonunun grafiği,

- $b > 0$ ise $y = f(x)$ fonksiyonunun y ekseni boyunca b birim yukarı ötelenmiş hâlidir.
- $b < 0$ ise $y = f(x)$ fonksiyonunun y ekseni boyunca $|b|$ birim aşağı ötelenmiş hâlidir.

Örnek 5

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonu üzerindeki $A(1, 5)$ noktasının $y = f(x) - 3$ dönüşümü ile $B(m, n)$ noktasına dönüştüğü biliniyorsa $m \cdot n$ ifadesinin değerini bulunuz.

Çözüm

$y = f(x) - 3$ dönüşümü $b = -3 < 0$ olduğundan $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin y eksenine paralel 3 birim aşağı ötelenmiş hâlidir. Bu durumda fonksiyonun üzerindeki noktaların apsisleri değişmezken ordinatları 3 birim azalmıştır. Buradan $B(m, n) = B(1, 5 - 3) \Rightarrow B(m, n) = B(1, 2)$ olur. Dolayısıyla $m \cdot n = 1 \cdot 2 = 2$ olur.

Sıra Sizde

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonu üzerindeki $A(-2, 3)$ noktasının $y = f(x) + 2$ dönüşümü ile $B(a, b)$ noktasına dönüştüğü biliniyorsa $2a + b$ ifadesinin değerini bulunuz.

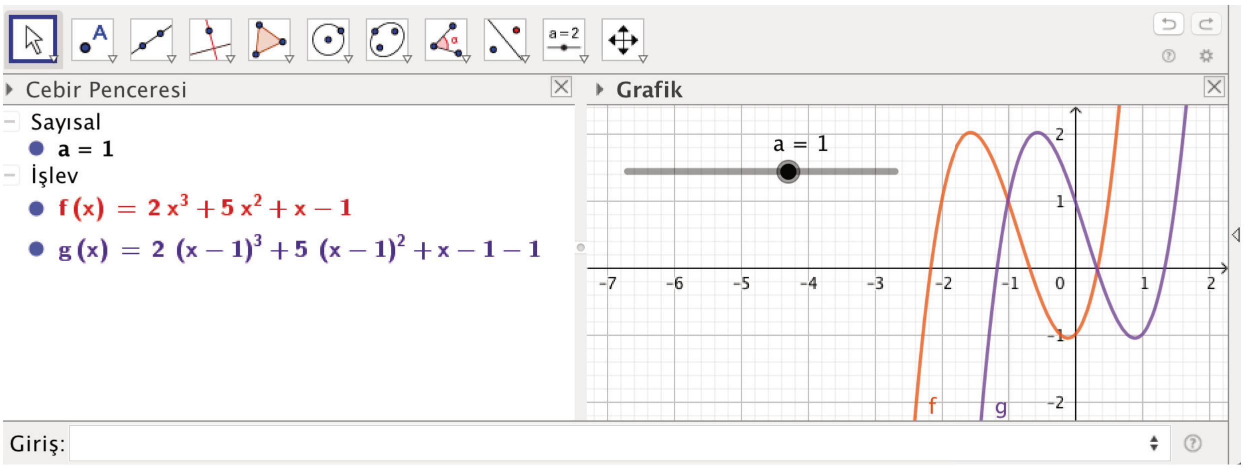
y = f(x – a) Dönüşümü

Örnek 6

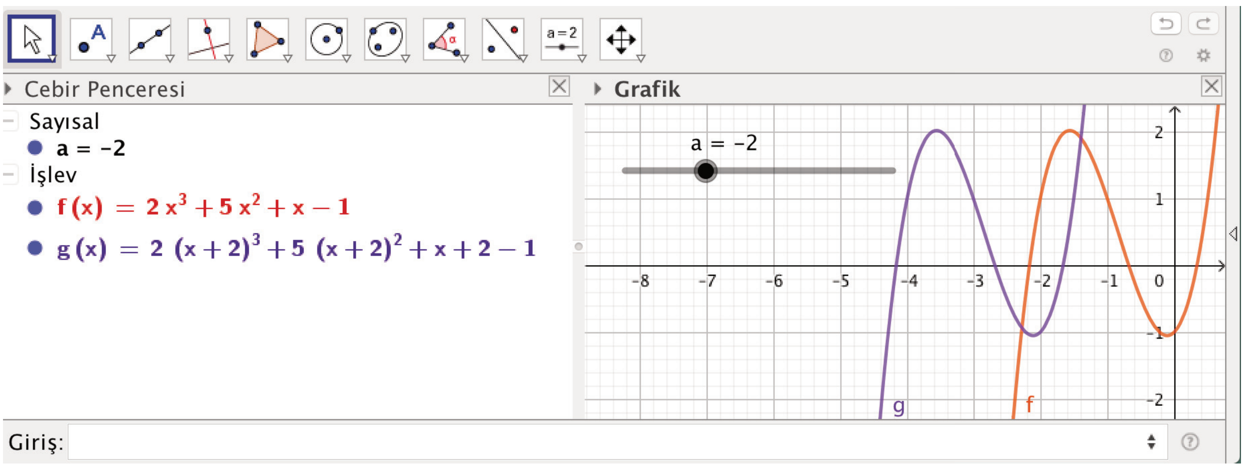
Dinamik matematik yazılımını kullanarak $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 1$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $y = f(x - a)$ dönüşümünün grafiği ile $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğini karşılaştırınız.

Çözüm

Dinamik matematik yazılımını açınız ve "Giriş" bölümüne $2x^3 + 5x^2 + x - 1$ yazarak "ENTER" tuşuna basınız. Böylece ekranda $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 1$ fonksiyon grafiği görülecektir.
Yine "Giriş" bölümüne $f(x - a)$ yazarak "ENTER" tuşuna basınız. Ekranda beliren kutuda "Sürgüler Oluştursun mu?" butonuna basınız. Böylece ekranda $a = 1$ sürgü değeri için $f(x - 1)$ fonksiyonu görülecektir. a sürgüsü 1 iken $y = f(x - 1)$ fonksiyonunun grafiğinin $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine göre x ekseni boyunca 1 birim sağa ötelendiği görülür.



a sürgüsü -2 iken $y = f(x + 2)$ fonksiyonunun grafiğinin $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine göre x ekseni boyunca 2 birim sola ötelendiği görülür.



İpucu

$y=f(x-a)$ fonksiyonunun grafiği,

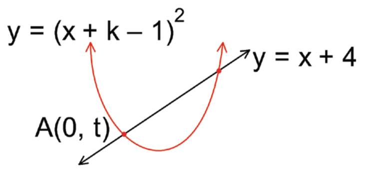
- $a>0$ ise $y=f(x)$ fonksiyonunun x ekseni boyunca a birim sağa ötelenmiş hâlidir.
- $a<0$ ise $y=f(x)$ fonksiyonunun x ekseni boyunca $|a|$ birim sola ötelenmiş hâlidir.

Örnek 7

$y=x$ fonksiyonunun x ekseni boyunca 4 birim sola ötelenmiş hâli ile $y=(x+k-1)^2$ fonksiyonunun grafiği y ekseni üzerinde kesişiyorsa k'nin alabileceği değerleri bulunuz.

Çözüm

$y=x$ fonksiyonunun x ekseni boyunca 4 birim sola ötelenmiş hâli $y=x+4$ olur.



$y=(x+k-1)^2$ ile $y=x+4$ fonksiyonlarının grafiklerinin y ekseni üzerinde kesiştikleri nokta A olmak üzere A noktasının apsisi 0 olacağından $A(0,\ t)$ olsun. $A(0,\ t)$ noktası $y=x+4$ doğrusu üzerinde olduğundan $t=0+4=4$ bulunur. Buradan $A(0,\ 4)$ noktası aynı zamanda $y=(x+k-1)^2$ parabolü üzerinde de olduğundan

$4=(0+k-1)^2 \Rightarrow (k-1)^2=4 \Rightarrow k-1=2$ veya $k-1=-2 \Rightarrow k=3$ veya $k=-1$ bulunur.

Sıra Sizde

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=x^2+2x+5$ fonksiyonunun 3 birim aşağı, 2 birim sağa ötelenmiş hâli $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+ax+b$ olduğuna göre a, b gerçek sayılarının değerlerini bulunuz.

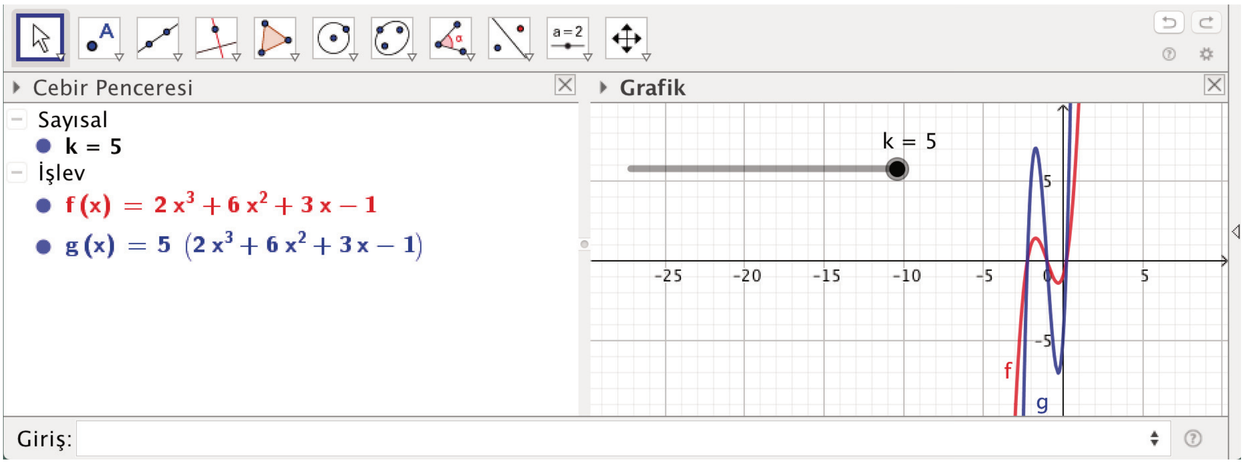
$y = k \cdot f(x)$ Dönüşümleri

Örnek 8

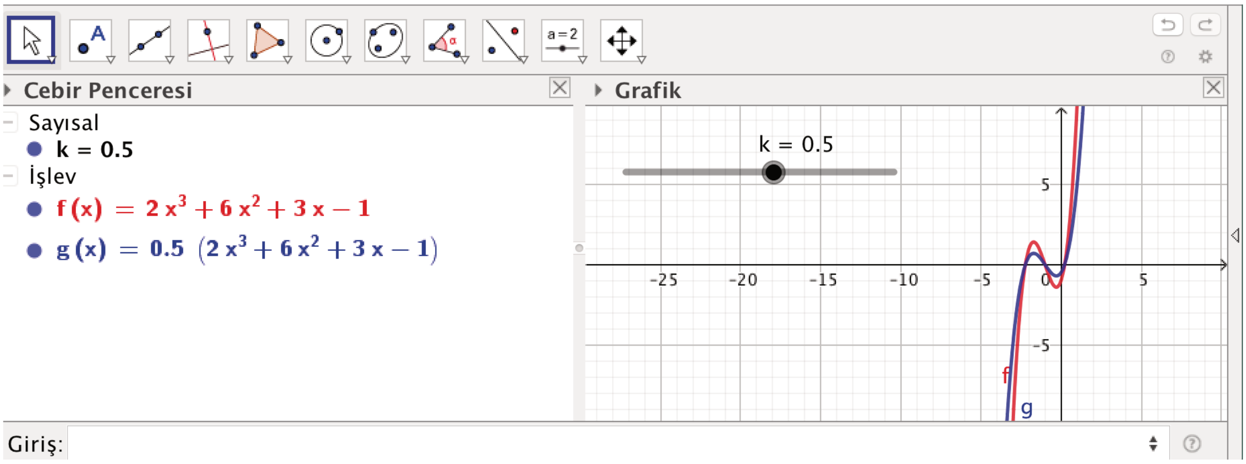
Dinamik matematik yazılımını kullanarak $f(x)=2x^3+6x^2+3x-1$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz. $k\in\mathbb{R}$ olmak üzere $y=k\cdot f(x)$ dönüşümünün grafiği ile $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiğini karşılaştırınız.

Çözüm

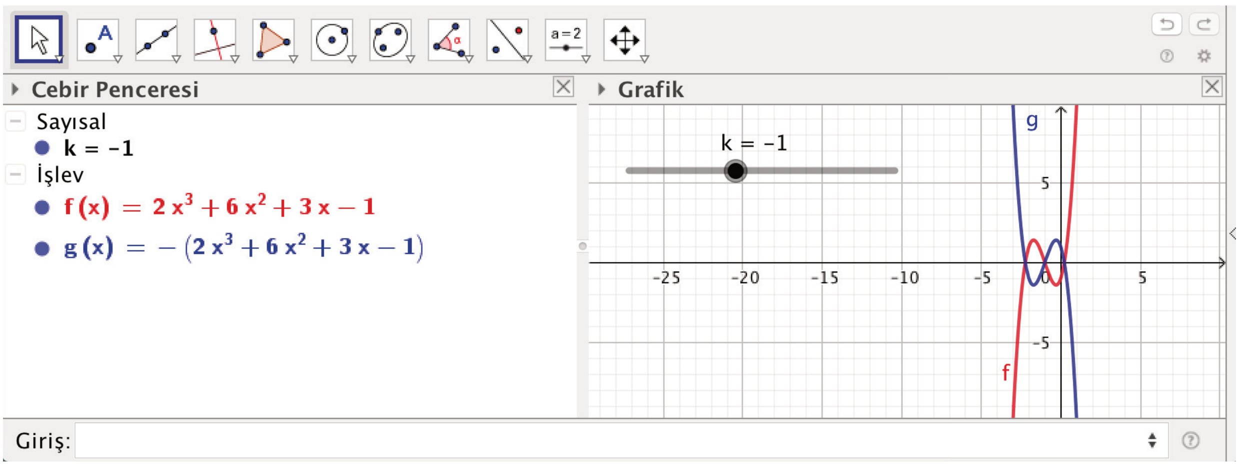
Dinamik matematik yazılımını açınız ve "Giriş" bölümüne $2x^3+6x^2+3x-1$ yazarak "ENTER" tuşuna basınız. Böylece ekranda $f(x)=2x^3+6x^2+3x-1$ fonksiyon grafiği görülecektir.
Yine "Giriş" bölümüne $y=k\cdot f(x)$ yazarak "ENTER" tuşuna basınız. Ekranda beliren kutuda "Sürgüler Oluştursun mu?" butonuna basınız. Böylece ekranda $k=1$ sürgü değeri için $y=1\cdot f(x)=f(x)$ fonksiyonu görülecektir. k sürgüsü sağa oynatılarak k değerinin 1'den büyük olan tarafta arttırılması ile oluşan grafiğin aslında $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin x eksenine göre dikey olarak açılması ile oluştuğu görülür.



$0<k<1$ iken $y=k\cdot f(x)$ fonksiyonunun grafiği $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin x eksenine doğru sıkıştırılması ile oluşmaktadır.



$k=-1$ iken $y=-f(x)$ fonksiyonunun grafiği ise $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin x eksenine göre simetriğidir.



Sıra Sizde

Dinamik matematik yazılımını kullanarak $f(x)=2x^3+6x^2+3x-1$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz. $k\in\mathbb{R}$ olmak üzere k'nin -1'den küçük olduğu durumlar ile k'nin $(-1,0)$'ndaki durumlar için
$y=k\cdot f(x)$
dönüşümünün grafiği ile $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin geçtiği noktaların apsislerine karşılık gelen ordinatlardaki farklılıkları karşılaştırınız.

İpucu

$y=k\cdot f(x)$ fonksiyonunun grafiği,

- $k>1$ ise $y=f(x)$ grafiğinin x eksenine göre dikey olarak açılması (gerilmesi) ile oluşur.
- $0<k<1$ ise $y=f(x)$ grafiğinin x eksenine doğru dikey olarak sıkıştırılması (büzülmesi) ile oluşur.
- $k=-1$ ise $y=-f(x)$ fonksiyonunun grafiği $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin x eksenine göre simetriğidir.

Örnek 9

$y=f(x)$ fonksiyonu ve üzerindeki $A(3,-2)$ noktası veriliyor. $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiğine $y=-3\cdot f(x)$ dönüşümü yapılırsa A noktasının bu dönüşüm altındaki koordinatlarını bulunuz.

Çözüm

Önce $y=3\cdot f(x)$ dönüşümü yapılsın. Bu durumda x değerleri değişmezken y değerleri 3 katına çıkar. O hâlde A noktası, $A'(3,3\cdot(-2))=A'(3,-6)$ noktasına denk gelir.
$y=3\cdot f(x)$ fonksiyonuna $k=-1$ dönüşümü yapılırsa $y=-1\cdot(3f(x))=-3f(x)$ bulunur. $k=-1$ dönüşümü ile bir önceki fonksiyonun x eksenine göre simetriği elde edildiğinden $A'(3,-6)$ noktası, $A''(3,6)$ olur.

y = f(k · x) ve f(–x) Dönüşümleri

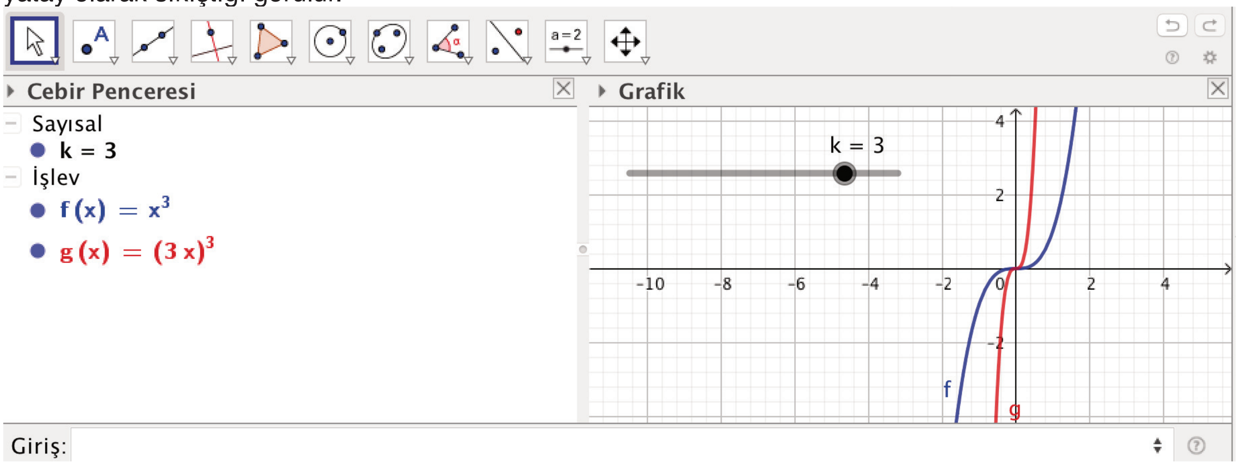
Örnek 10

Dinamik matematik yazılımını kullanarak $f(x)=x^3$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz. $k\in\mathbb{R}$ olmak üzere $y=f(k\cdot x)$ dönüşümünün grafiği ile $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiğini karşılaştırınız.

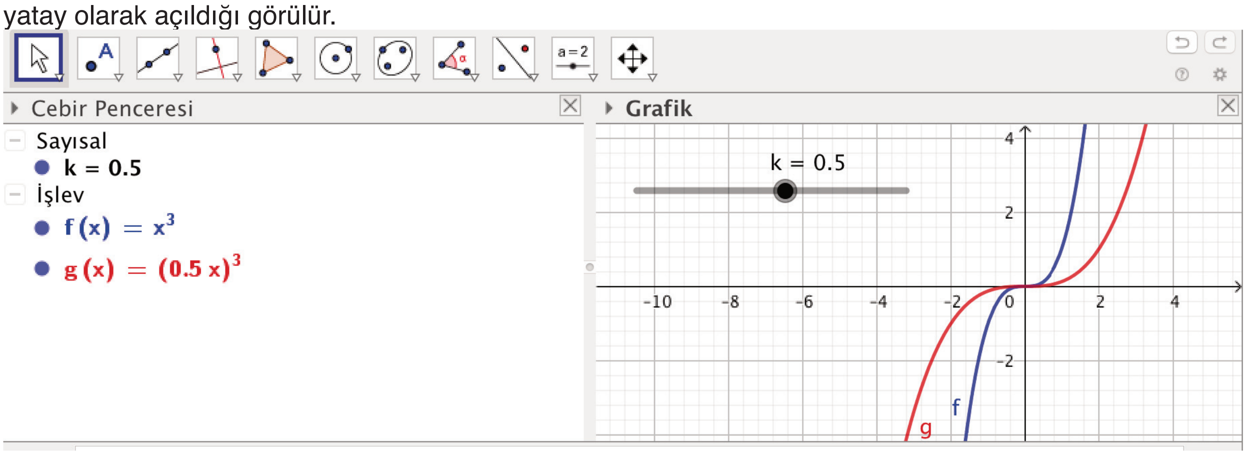
Çözüm

Dinamik matematik yazılımını açınız ve "Giriş"bölümüne x^3 yazarak "ENTER" tuşuna basınız. Böylece ekranda $f(x) = x^3$ fonksiyonunun grafiği görülecektir. Yine "Giriş" bölümüne $y = f(k \cdot x)$ yazarak "ENTER" tuşuna basınız. Ekranda beliren kutuda "Sürgüler Oluştursun mu?" butonuna basınız. Böylece ekranda $k = 1$ sürgü değeri için $y = f(1 \cdot x) = f(x)$ fonksiyonu görülecektir.

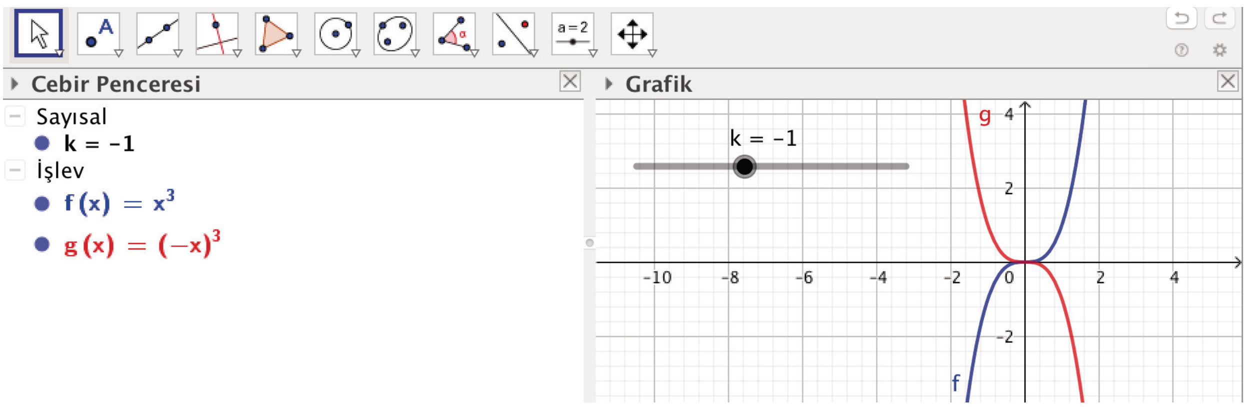
$k > 1$ için $y = f(k \cdot x)$ fonksiyonunun grafiğinin $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine göre y eksenine doğru yatay olarak sıkıştığı görülür.



$0 < k < 1$ için $y = f(k \cdot x)$ fonksiyonunun grafiğinin $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine göre y ekseninden yatay olarak açıldığı görülür.



$k = -1$ için $y = f(-x)$ fonksiyonunun grafiği, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin y eksenine göre simetriği olduğu görülür.



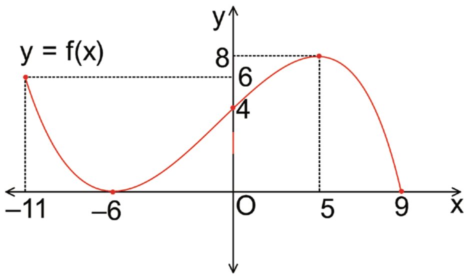
İpucu

- $y = f(k \cdot x)$ fonksiyonunun grafiği, $k > 1$ ise $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin y eksenine doğru yatay olarak daraltılması ile oluşur.

- $y = f(k \cdot x)$ fonksiyonunun grafiği, $0 < k < 1$ ise $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin y ekseninden yatay olarak açılması ile oluşur.

- $y = f(k \cdot x)$ fonksiyonunun grafiği, $k = -1$ ise ($y = f(-x)$ fonksiyonunun grafiği) $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin y eksenine göre simetriğidir.

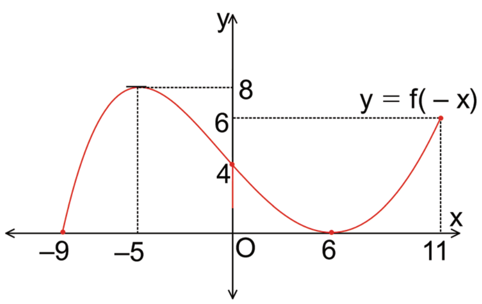
Örnek 11

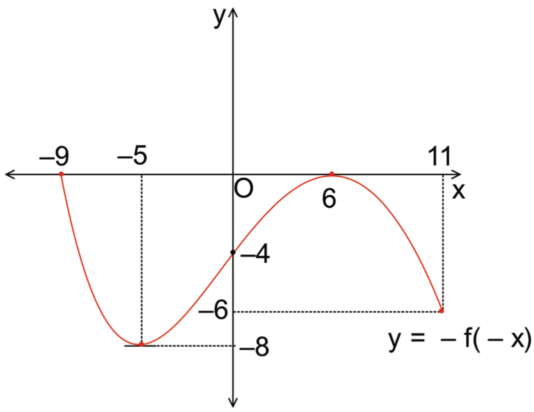


Yanda $f:[-11, 9] \rightarrow [0, 8]$, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $y = -f(-x)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

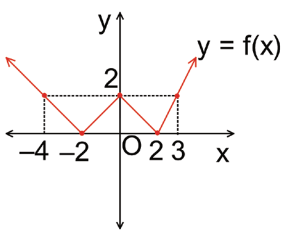
Çözüm

Önce $y = f(-x)$ fonksiyonu, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin y eksenine göre simetriği olarak çizilir. Daha sonra $y = f(-x)$ fonksiyonunun x eksenine göre simetriği olan $y = -f(-x)$ grafiği çizilir.





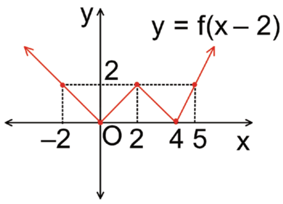
Örnek 12



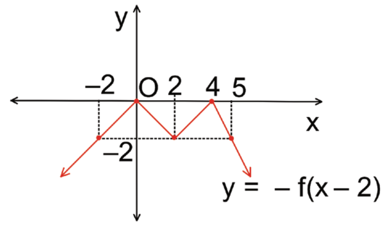
Yanda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.
$y = -f(x-2) + 3$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm

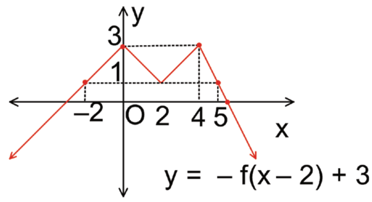
Önce $y=f(x-2)$ fonksiyonunun grafiği, $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin 2 birim sağa ötelenmiş hâli olarak aşağıdaki şekilde olduğu gibi çizilir.



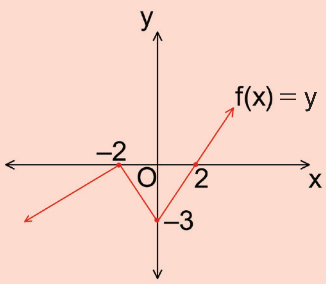
Daha sonra $y=-f(x-2)$ fonksiyonunun grafiği, $y=f(x-2)$ fonksiyonunun grafiğinin x eksenine göre simetriği olarak çizilir.



Son olarak $y=-f(x-2)+3$ fonksiyonunun grafiği, $y=-f(x-2)$ fonksiyonunun grafiğinin 3 birim yukarı ötelenmesi ile çizilir.



Sıra Sizde



Yandaki şekilde f fonksiyonun grafiği verilmiştir. $-f(x+1)-2$ ifadesinin grafiğini çiziniz.

ALIŞTIRMALAR

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ çift fonksiyon ve $f(x)+x^2=-2\cdot f(-x)+11$ olmak üzere $f(-5)$ ifadesinin değerini bulunuz.

2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)$ çift fonksiyon ve $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)$ tek fonksiyon ve $f(-9)=5$ ve $g(-3)=4$ veriliyor. Buna göre $2f(9)-2g(3)+8$ ifadesinin değerini bulunuz.

3. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $y=f(x)$ fonksiyonu üzerinde $A(3,\ 4)$ noktası bulunmaktadır. Bu noktanın aşağıdaki dönüşümler altındaki koordinatlarını bulunuz.

a) $y=f(x)-2$
b) $y=f(x-2)$
c) $y=2\cdot f(x)$
ç) $y=f(2x)$

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 1

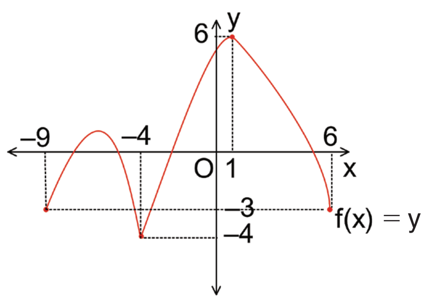
A) Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerlere doğru ifadeyi yazınız.

1. $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ ve $E \subseteq A$ olmak üzere her $x_1, x_2 \in E$ için $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ ise f fonksiyonu E üzerinde .... fonksiyondur.

2. $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ ve $E \subseteq A$ olmak üzere her $x_1, x_2 \in E$ için $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) > f(x_2)$ ise f fonksiyonu E üzerinde .... fonksiyondur.

B) Aşağıda numaralarla verilen ifadeler ile harflerle verilen ifadeleri eşleştirip eşleşenleri altındaki kutuya yazınız.

3.



Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

1. Fonksiyonun maksimum değeri
2. Fonksiyonun minimum değeri
3. Fonksiyonun tanım aralığı
4. Fonksiyonun değer aralığı

a) 6
b) $[-9, 6]$
c) $(0, 6)$
ç) -4
d) $[-4, 6]$
e) -9

1.	2.	3.	4.

C) Aşağıdaki açık uçlu soruların doğru cevabını yazınız.

4. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - 24$ fonksiyonunun değerlerinin pozitif ya da negatif olduğu aralıkları bulunuz.

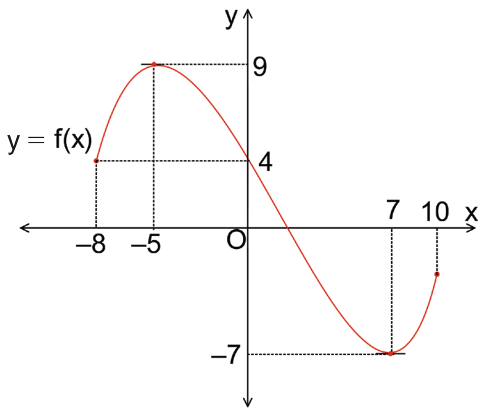
5. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 4$ ve $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -3x + 12$ fonksiyonlarının artan veya azalan olduğu tanım aralıklarını bulunuz.

6. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 11$ fonksiyonunun $[4, 10]$ için ortalama değişim hızını bulunuz.

7. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 5x - 14$ fonksiyonunun değerlerinin negatif olduğu aralığı bulunuz.

8. $k \in \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = 2x^3 + (k-1)x^2 + 5x + 3 + k$ fonksiyonu veriliyor. Bu fonksiyonun grafiğinin x eksenini kestiği noktanın apsisi 2 olduğuna göre y eksenini kestiği noktayı bulunuz.

9 - 11. soruları aşağıda verilen grafiğe göre cevaplandırınız.



9. $[-8, 10]$ için f fonksiyonunun artan olduğu aralıkları yazınız.

10. Fonksiyonun maksimum değeri m, minimum değeri n olmak üzere $m \cdot n$ ifadesinin değerini bulunuz.

11. $[-5, 7]$ için fonksiyonun ortalama değişim hızını bulunuz.

D) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruları okuyunuz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

12. m ile n birbirinden farklı tam sayılar olmak üzere $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + 5$ fonksiyonunun $[m, n]$ için ortalama değişim hızı negatif olduğuna göre $m + n$'nin **en büyük** tam sayı değeri kaçtır?

A) –5 B) –3 C) –2 D) 1 E) 2

13. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + a - 2$ fonksiyonunun herhangi bir aralık için değişim hızı 5 olduğuna göre $f(5)$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) 18 B) 21 C) 25 D) 28 E) 32

14. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (a + 2)x + 6$ fonksiyonu artan, $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = (a - 3)x - 8$ fonksiyonu azalan olduğuna göre a'nın tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

DEĞERLENDİRME

Cevaplarınızı cevap anahtarı ile karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorularla ilgili konuları veya faaliyetleri geri dönerek tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 2

A) Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerlere doğru ifadeyi yazınız.

1. $a \neq 0$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c$ şeklindeki fonksiyonların grafiklerine .... denir.

2. $a \neq 0$ için $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiğinin tepe noktasından geçen $x = -\dfrac{b}{2a}$ doğrusuna .... denir.

3. $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonununda $a > 0$ ise parabolün kolları .... doğrudur.

4. $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonununda $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin iki reel kökü varsa fonksiyon x eksenini .... noktada keser.

5. $a \neq 0$ için $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiğinin tepe noktası x ekseni üzerinde ise fonksiyon x eksenine .... denir.

B) Gerçek sayılar kümesinde tanımlanan aşağıdaki fonksiyonları kendi simetri eksenleri ile eşleştirip eşleşenleri alttaki kutulara yazınız.

6.
1. $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$
2. $f(x) = -x^2 + 6x - 3$
3. $f(x) = 3x^2 + 12x + 4$
4. $f(x) = -x^2 - 8x + 7$

a) $x = 2$
b) $x = -4$
c) $x = 1$
d) $x = 3$
e) $x = -2$

1.	2.	3.	4.

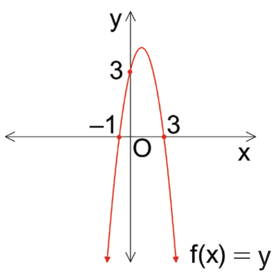
C) Aşağıdaki açık uçlu soruların doğru cevabını yazınız.

7. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 - 4x + a$ fonksiyonunun grafiği x eksenine negatif tarafta teğet ise a değerini bulunuz.

8. $f: [-3, 5] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 8x + 5$ fonksiyonunun **en büyük** ve **en küçük** değerinin toplamını bulunuz.

9. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^2 + 12x - n + 5$ fonksiyonunun tepe noktası x ekseni üzerinde olduğuna göre n gerçek sayısının değerini bulunuz.

10.



Yukarıdaki f fonksiyonunda $f(2) + f(4)$ ifadesinin değerini bulunuz.

11 - 13. soruları aşağıda verilen bilgilere göre cevaplandırınız.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu ile ilgili bilgiler aşağıda verilmiştir:

I. İkinci dereceden bir fonksiyondur.
II. Simetri ekseni $x=2$ doğrusudur.
III. En büyük değeri 9'dur.
IV. x eksenini kestiği noktalardan biri $(5,\ 0)$'dır.

11. f fonksiyonunu bulunuz.

12. f fonksiyonun grafiği ile x ekseni arasına yerleştirilebilecek **en büyük** dikdörtgenin çevresinin kaç birim olduğunu bulunuz.

13. Tepe noktasının orijine olan uzaklığının kaç birim olduğunu bulunuz.

D) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruları okuyunuz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

14. $f:[-2,\ 3]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+2x-3$ fonksiyonunun görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[-12,\ -4]$ B) $[-12,\ 4]$ C) $[-4,\ 9)$ D) $[-4,\ 9]$ E) $[-4,\ 12]$

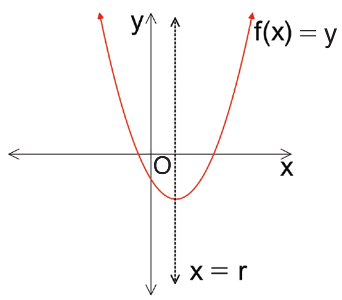
15. $y=2mx+5$ doğrusu $y=x^2-3x+14$ parabolüne teğet olduğuna göre m'nin alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

A) -7 B) -5 C) -3 D) 2 E) 5

16. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ve $a>0$ olmak üzere $f(x)=x^2+(2a+2)x+4$ fonksiyonunun grafiğine ait tepe noktası x ekseni üzerinde olduğuna göre tepe noktasının apsisi kaçtır?

A) -3 B) -1 C) 1 D) 4 E) 6

17.



Yukarıda $f(x)=ax^2+bx+c$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $f(x)$ ile ilgili verilenlerden

I. $a\cdot b>0$

II. $2c+3b<0$

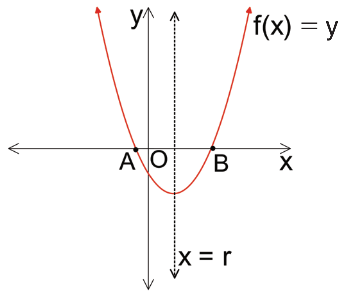
III. $\Delta>0$

IV. $a\cdot c\cdot\Delta<0$

hangisi ya da hangileri doğrudur?

A) I-II B) II-III C) III-IV D) II-III-IV E) I-II-IV

18.



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + m - 3$ fonksiyonu ile ilgili şekilde $|OB| = 3 \cdot |OA|$ olduğuna göre m ifadesinin değeri kaçtır?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

19. Bir turizm firması Doğu Anadolu turu düzenleyecektir. Bu tur ile ilgili aşağıdaki bilgiler veriliyor.

I. Kişi başı ücret 120 Türk lirasıdır.

II. Tura katılan kişi sayısı 50'den fazla olursa her bir kişi için tüm katılımcılara ikişer Türk lirası geri ödeme yapılacaktır.

III. Tura katılacak kişi sayısı 90 kişi ile sınırlıdır.

Buna göre tura kaç kişi katılırsa tur firmasının elde edeceği gelir **en fazla** olur?

A) 50 B) 55 C) 60 D) 75 E) 80

20. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x - 3$ fonksiyonunun görüntü kümesindeki tam sayıların kümesi A ve $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -x^2 + 1$ fonksiyonunun görüntü kümesindeki tam sayıların kümesi B olduğuna göre $A \cap B$ kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinin kaçında **en az** bir pozitif tam sayı bulunur?

A) 35 B) 28 C) 20 D) 15 E) 10

21. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x - 1$ ile
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + 2$
doğrusunun kesişme noktaları A ve B olduğuna göre $|AB|$ kaç birimdir?

A) $4\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{5}$ D) $5\sqrt{2}$ E) $5\sqrt{3}$

22. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - 4x + k + 1$ parabolü x eksenini kesmediğine göre k'nin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-3, -1)$ B) $(-3, 1)$ C) $(-2, 3)$ D) $(1, \infty)$ E) $(-\infty, 1)$

23. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 - 4x + m + 7$ fonksiyonunun **en büyük** değeri 3 olduğuna göre m değeri kaçtır?

A) −8 B) −4 C) 1 D) 2 E) 4

24. $f: [-3, 4) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 5$ fonksiyonunun **en büyük** tam sayı değeri kaçtır?

A) 29 B) 28 C) 20 D) 18 E) 16

DEĞERLENDİRME

Cevaplarınızı cevap anahtarı ile karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorularla ilgili konuları veya faaliyetleri geri dönerek tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 3

A) Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerlere doğru ifadeyi yazınız.

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olmak üzere $f(x)$ çift fonksiyon ise bu fonksiyonun grafiği .... eksenine göre simetriktir denir.

2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olmak üzere $f(x)$ tek fonksiyon ise bu fonksiyonun grafiği.................... göre simetriktir denir.

B) y = f(x) üzerindeki A(a, b) noktasının aşağıda numaralarla verilen dönüşümlere karşılık gelen noktaları harflerle verilen ifadelerin eşit olanları ile eşleştirip eşleşenleri altındaki kutuya yazınız.

3.

1. $y=f(x)-2$
2. $y=f(x-2)$
3. $y=2f(x)$

a) $(a,\ b-2)$
b) $(a,\ b+2)$
c) $(a,\ 2b)$
ç) $(a+2,\ b)$
d) $(2a,\ -2b)$

1.	2.	3.

C) Aşağıdaki açık uçlu soruların doğru cevabını yazınız.

4. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu orijine göre simetrik fonksiyondur. $3f(x)=-f(-x)+x^3+x$ olmak üzere $f(2)$ ifadesinin değerini bulunuz.

5. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$ parabolü 2 birim sağa ve 3 birim aşağıya ötelenirse $f(x)=2x^2-8x+1$ parabolü elde ediliyor. Buna göre $a\cdot b+c$ ifadesinin değerini bulunuz.

6 - 9. soruları aşağıda verilen bilgilere göre cevaplandırınız.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$ fonksiyonu ile ilgili bilgiler aşağıda verilmiştir.

I. Katsayılar toplamının sayısal değeri sabit terimin 2 katıdır.
II. $f(x)-f(-x)=0$
III. Fonksiyonun grafiğinin tepe noktasının ordinatı 4 'tür.

6. f fonksiyonunun simetri eksenini bulunuz.

7. $f(5)-f(2)$ ifadesinin değerini bulunuz.

8. f fonksiyonunun azalan olduğu aralığı bulunuz.

9. f fonksiyonun $[-3,\ -1]$ için **en büyük** ve **en küçük** değerini bulunuz.

D) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruları okuyunuz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

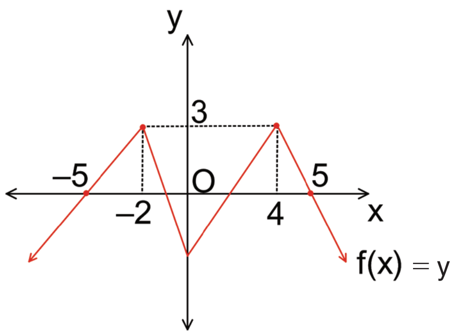
10. $y = f(x)$ fonksiyonu üzerindeki $A(7, 5)$ noktasının $2f(x-2)-3$ dönüşümü altındaki görüntüsü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(1, 2)$ B) $(9, 7)$ C) $(1, 3)$ D) $(5, 1)$ E) $(9, 3)$

11. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu y eksenine göre simetrik fonksiyondur. $f(x) = -3f(-x) + x^2 - 4$ olmak üzere $f(4)$ ifadesinin değerini bulunuz.

A) 3 B) 4 C) 6 D) 8 E) 12

12.

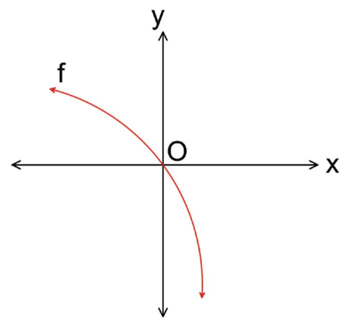


Yukarıda $f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $-f(x-a)+2$ fonksiyonun grafiği ile $y = 2$ doğrusu kaç noktada kesişir?

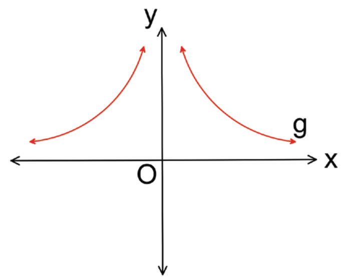
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

13.

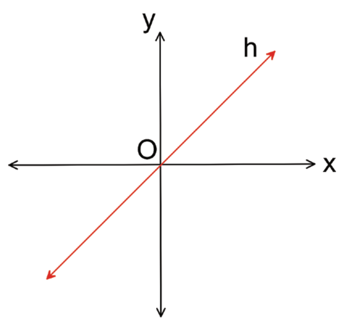
I.



II.



III.



Yukarıda verilen şekillerdeki fonksiyonların hangileri tek fonksiyon **olamaz**?

A) Yalnız I B) II ve III C) I ve III D) Yalnız II E) I ve II

DEĞERLENDİRME

Cevaplarınızı cevap anahtarı ile karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorularla ilgili konuları veya faaliyetleri geri dönerek tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.eçiniz.

SAYILAR VE CEBİR

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f(x)$	a ile aynı işaretli		a ile ters işaretli		a ile aynı işaretli

4

Denklem ve Eşitsizlik Sistemleri

- 11.4.1. İkinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem Sistemleri
- 11.4.2. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler ve Eşitsizlik Sistemleri

11.4. DENKLEM VE EŞİTSİZLİK SİSTEMLERİ

Hazırlık Çalışması

1.

Hüseyin ve Senem ilk gün eşit sayfa okuyarak kitap okumaya başlıyorlar.

- Hüseyin her gün, bir önceki gün okuduğu sayfa sayısından 2 sayfa fazla okumaktadır.
- Senem ise her gün bir önceki gün okuduğu sayfa sayısından 3 sayfa fazla kitap okumaktadır. Verilen bu bilgilere göre aşağıdaki soruları cevaplandırınız.

a) "3. günün sonunda her ikisinin okuduğu sayfa sayılarının çarpımı en az 120'dir." olarak verilen sözel ifadeyi cebirsel olarak ifade ediniz.

b) "2. günün sonunda her ikisinin okuduğu sayfa sayılarının çarpımının toplamına oranı 2'den büyüktür." olarak verilen sözel ifadeyi cebirsel olarak ifade ediniz.

2.

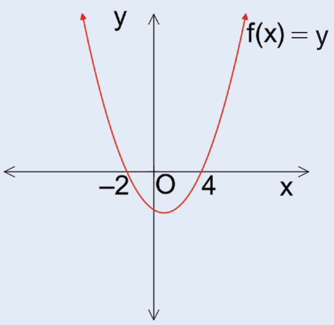
Bir ilçenin belediyesi ilçede yaşayan ihtiyaç sahipleri için ilçenin bazı semtlerine, giyecek toplamak amacıyla dolaplar koymuştur. Bir haftanın sonunda giyecekler toplanarak sayımları yapılmıştır. Sayım ile ilgili aşağıdaki bilgiler verilmiştir.

a) 1. dolaptan çıkan giyecek sayısı 2. dolaptan çıkan giyecek sayısından 20 eksiktir.

b) 3. dolaptan çıkan giyecek sayısı 1. dolaptan çıkan giyecek sayısından 40 fazladır.

"1 ve 3. dolaptan çıkan giyecek sayılarının çarpımı 2. dolaptan çıkan giyecek sayısından çoktur." olarak verilen sözel ifadeyi 2. dolaptan çıkan giyecek sayısına x yazıp $x = 20$ ve $x = 21$ değerleri için bu denklemin doğruluğunu araştırınız.

3. Gerçek sayılar kümesinde tanımlı bir f fonksiyonunun grafiğinin x ekseninin üstünde kalan kısmında f(x) sıfırdan büyük, x ekseninin altında kalan kısmında ise f(x) sıfırdan küçük değerler alır. Aşağıda bir f fonksiyonu ve bu fonksiyonla ilgili işaret inceleme tablosu verilmiştir.



x	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 4$	$4 < x < \infty$
f(x)'in işareti	⊕ ⊖	⊕ ⊖	⊕ ⊖

Bu bilgilere göre işaret tablosunda verilen x gerçek sayı aralıklarına karşılık gelen f(x)'in işaretini bulup ⊕ ve ⊖ kutucuklarından doğru işaret taşıyanı tarayınız.

Adana Çocuk Evleri Sitesi'nin yeni binasında bulunan, alanı en çok 400 metrekare olan kare biçimindeki toplantı salonunun zemini parke döşetilmek isteniyor. Bunun için A firması, bu işi parke maliyetinden daha az fiyata yapabileceğini belirtiyor. Firma; bir kenarı x metre olan kare şeklindeki zemini parke ile döşeme işlemi için parke maliyetini alan üzerinden metrekaresini 20 Türk lirası, satış fiyatını ise çevre üzerinden metresini 100 Türk lirası olarak belirlemiştir. Bu durumda kare biçimindeki salonun bir kenarı x metre olmak üzere kullanılan parkenin maliyet fiyatı $20 \cdot x^2$, satış fiyatı $4 \cdot x \cdot 100 = 400x$ olarak gösterilebilir. Firma zemini maliyetinden daha az bir fiyata döşeyeceğine göre satış fiyatı maliyet fiyatından küçük olmalıdır. Bu durum matematiksel olarak $400x < 20x^2$ eşitsizliği ile gösterilebilir. Karenin alanının en çok 400 metrekare olması ise $x^2 \leq 400$ eşitsizliği ile gösterilir. Bu durumda x bilinmeyeni ile ilgili iki şartın var olduğu görülür. Bu şartlar birlikte yazılırsa

$$\left.\begin{aligned} 20x^2 &< 400x \\ x^2 &\leq 400 \end{aligned}\right\} \quad \text{eşitsizlik sistemi elde edilir.}$$

Bu bölümde iki veya daha fazla eşitsizlikten ya da denklemden oluşan sistemleri ve bu sistemleri sağlayan değer aralıklarını veya değerleri bulmayı öğreneceksiniz.

11.4.1. İkinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem Sistemleri

Neler Öğreneceksiniz?

- İkinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemlerinin çözüm kümesini bulmayı öğreneceksiniz.

11.4.1.1. İkinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem Sistemleri

Bilgi

a, b, c, d, e, f birer gerçek sayı ve a, b, c sayılarından en az ikisi sıfırdan farklı

- $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ biçimindeki denklemlere **ikinci dereceden iki bilinmeyenli denklemler** denir.
- İki bilinmeyen içeren en az birinin ikinci dereceden olduğu birden fazla denklemden oluşan sisteme **ikinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi** denir.
- Denklem sistemini sağlayan (x, y) biçimindeki gerçek sayı ikilileri bu denklem sisteminin çözüm kümesini oluşturur.
- İkinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemlerinin çözüm kümesini cebirsel yoldan bulmak için genel olarak yok etme yöntemi veya yerine yazma yöntemi kullanılır.

Örnek 1

$$\left.\begin{aligned} x^2+y&=9 \\ x+y&=7 \end{aligned}\right\}$$ denklem sisteminin çözüm kümesini cebirsel yolla bulup grafik yardımıyla yorumlayınız.

Çözüm

Denklem sistemini oluşturan denklemlerden birinden bir değişkeni çekip diğer denklemde yerine yazarak (yerine yazma yöntemi) çözüm kümesi elde edilebilir.

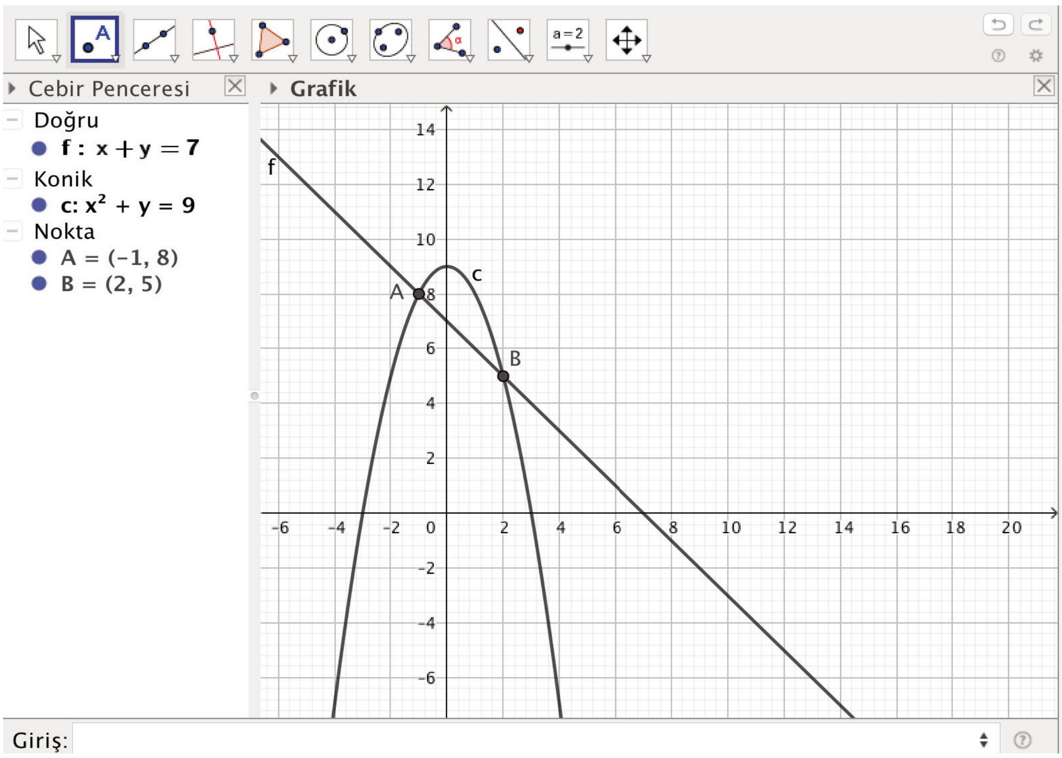
$x+y=7$ için $y=7-x$ olup $x^2+y=9$ denkleminde y yerine $7-x$ yazılırsa
$x^2+7-x=9$
$x^2-x-2=0$ olup $(x-2)\cdot(x+1)=0$ için $x_1=2$ veya $x_2=-1$ olur.

$$\begin{array}{ll} \downarrow & \downarrow \\ x & -2 \\ x & +1 \end{array}$$

$x_1=2$ için $y=7-x=7-2=5$ olup denklem sisteminin çözüm kümesinin elemanlarından biri (2, 5) olur.
$x_2=-1$ için $y=7-x=7-(-1)=8$ olup denklem sisteminin çözüm kümesinin diğer elemanı $(-1, 8)$ olur.
Buradan denklem sisteminin $ÇK=\{(2,5),\ (-1,8)\}$ olarak yazılır.

Elde edilen çözüm kümesi dinamik matematik yazılımı kullanılarak aşağıdaki gibi gösterilebilir.

Dinamik matematik yazılımını açarak Giriş bölümüne $x^2+y=9$ yazınız ve "ENTER" tuşuna basınız. Benzer şekilde Giriş bölümüne $x+y=7$ yazınız ve "ENTER" tuşuna basınız. Araç çubuğundaki ikinci kutuya ve ardından açılan Nokta sekmesine tıklayınız. Daha sonra grafiklerin kesişim noktalarına tıklanırsa bu noktaların çözüm kümesinin elemanları olduğu görülür.



Örnek 2

$\left.\begin{aligned} x^2-y^2+2xy+2=0 \\ x+2y=-1 \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini cebirsel yolla bulup grafik yardımıyla yorumlayınız.

Çözüm

$x+2y=-1$ ise $x=-2y-1$ olup $x^2-y^2+2xy+2=0$ denkleminde x yerine $-2y-1$ yazılırsa

$$(-2y-1)^2-y^2+2(-2y-1)y+2=0$$
$$4y^2+4y+1-y^2-4y^2-2y+2=0$$
$$-y^2+2y+3=0$$
$$y^2-2y-3=0 \text{ olup } (y-3)\cdot(y+1)=0 \text{ için } y_1=3 \text{ veya } y_2=-1 \text{ olur.}$$

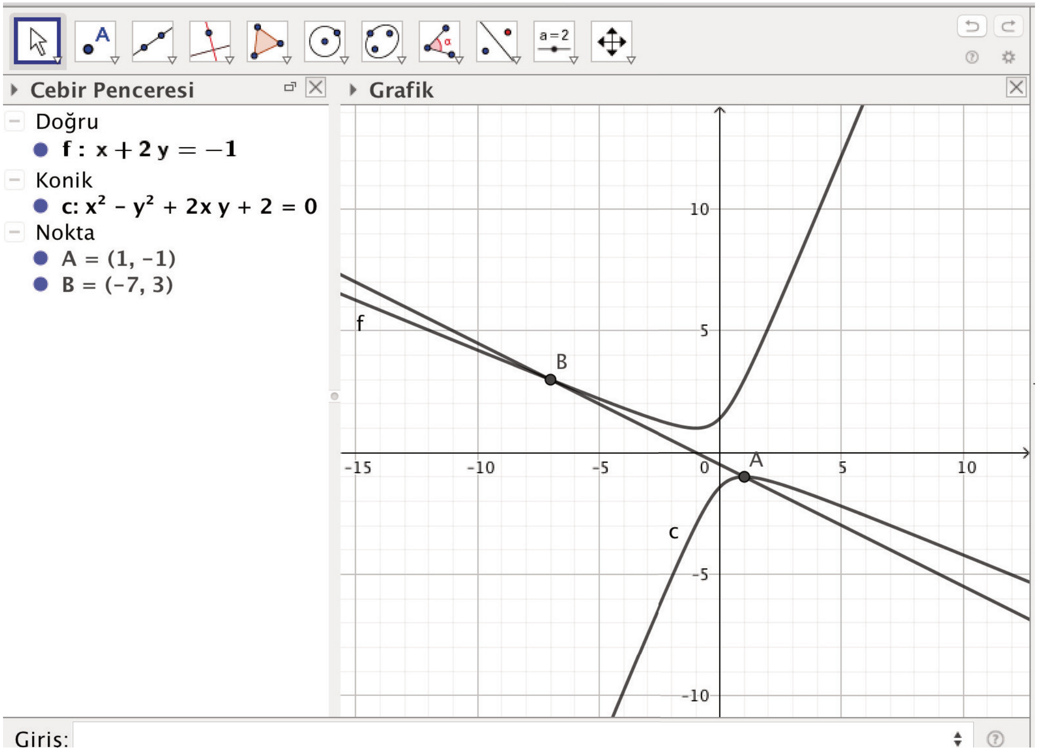
$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ y & -3 \\ y & 1 \end{array}$$

Buradan $y_1=3$ için $x=-2y-1=-2\cdot 3-1=-7$ olup denklem sisteminin çözüm kümesinin elemanlarından biri $(-7,3)$ olur.

$y_2=-1$ için $x=-2y-1=-2\cdot(-1)-1=1$ olup denklem sisteminin çözüm kümesinin diğer elemanı (1, −1) olur. Buradan denklem sisteminin $ÇK=\{(-7,3),\ (1,-1)\}$ olarak yazılır.

Elde edilen çözüm kümesi dinamik matematik yazılımı kullanılarak aşağıdaki gibi gösterilebilir.

Dinamik matematik yazılımını açarak Giriş bölümüne $x^2-y^2+2xy+2=0$ yazınız ve "ENTER" tuşuna basınız. Benzer şekilde Giriş bölümüne $x+2y=-1$ yazınız ve "ENTER" tuşuna basınız. Araç çubuğundaki ikinci kutuya ve ardından açılan Nokta sekmesine tıklayınız. Daha sonra grafiklerin kesişim noktalarına tıklanırsa bu noktaların çözüm kümesinin elemanları olduğu görülür.



Örnek 3

$\left.\begin{aligned} x^2-4y^2&=-7 \\ x^2+y^2&=13 \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini cebirsel yolla bulup grafik yardımıyla yorumlayınız.

Çözüm

Değişkenlerden herhangi birinin katsayıları mutlak değerce eşit ve işaret bakımından zıt duruma getirilip taraf tarafa toplama işlemi (yok etme) yapılarak denklem sisteminin çözüm kümesi bulunabilir.

$x^2+y^2=13$ denkleminde eşitliğin her iki tarafı -1 ile çarpılırsa $-x^2-y^2=-13$ olur.

$$\begin{array}{rr} & x^2-4y^2=-7 \\ + & -x^2-y^2=-13 \\ \hline & -5y^2=-20 \end{array}$$

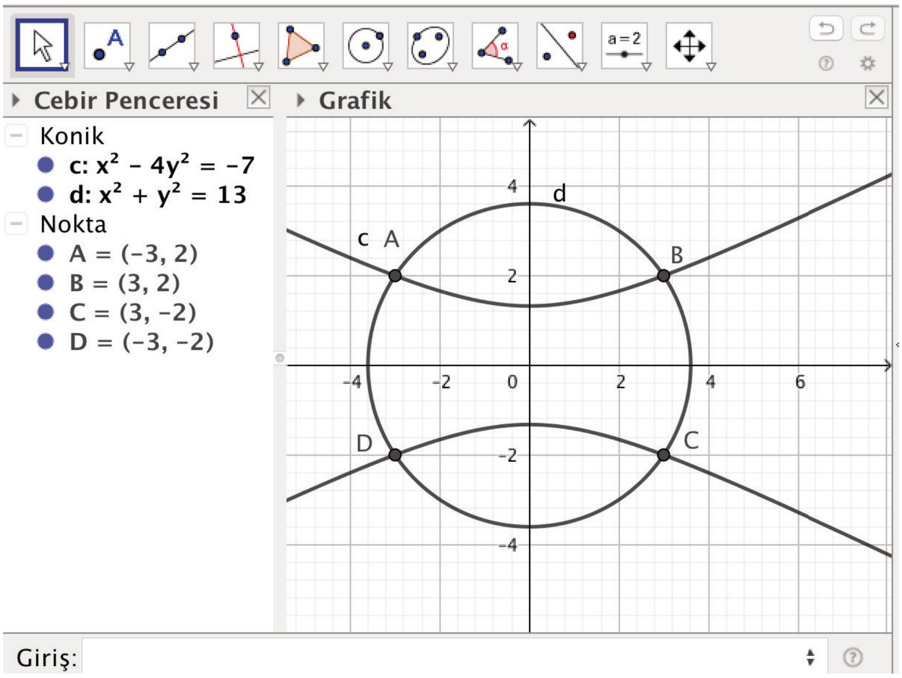
$y^2=4$ olup $y_1=2$ veya $y_2=-2$ olur.

Bulunan y değerleri verilen denklemlerin herhangi birinde yerine yazılabilir.
$y_1=2$ için $x^2+y^2=13 \Rightarrow x^2+2^2=13 \Rightarrow x^2=9$ olup $x_1=3$ veya $x_2=-3$ olur.

Buradan $(3,\ 2)$ ve $(-3,\ 2)$ çözüm kümesinin elemanlarıdır.
$y_2=-2$ için $x^2+y^2=13 \Rightarrow x^2+(-2)^2=13 \Rightarrow x^2=9$ olup $x_1=3$ ve $x_2=-3$ olur.

Buradan $(3,\ -2)$ ve $(-3,\ -2)$ çözüm kümesinin elemanlarıdır.
Denklem sisteminin $ÇK=\{(3,\ 2),\ (3,\ -2),\ (-3,\ 2),\ (-3,\ -2)\}$ olarak yazılır.
Elde edilen çözüm kümesi dinamik matematik yazılımı kullanılarak aşağıdaki gibi gösterilebilir.

Dinamik matematik yazılımını açarak Giriş bölümüne $x^2-4y^2=-7$ yazınız ve "ENTER" tuşuna basınız. Benzer şekilde Giriş bölümüne $x^2+y^2=13$ yazınız ve "ENTER" tuşuna basınız. Araç çubuğundaki ikinci kutuya ve ardından açılan Nokta sekmesine tıklayınız. Daha sonra grafiklerin kesişim noktalarına tıklanırsa bu noktaların çözüm kümesinin elemanları olduğu görülür.



Sıra Sizde

$\left.\begin{aligned} x^2+3y^2+2x-11&=0 \\ x-y&=1 \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini cebirsel yolla bulup grafik yardımıyla yorumlayınız.

Örnek 4

$\left.\begin{aligned} x^2-2xy-3y^2&=6 \\ x-3y&=2 \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini cebirsel yolla bulup grafik yardımıyla yorumlayınız.

Çözüm

$x^2-2xy-3y^2=6$ ise $(x-3y)\cdot(x+y)=6$ olur.

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ x & & -3y \\ x & & y \end{array}$$

$x-3y=2$ olduğundan $(x-3y)\cdot(x+y)=6$ denkleminde $x-3y$ yerine 2 yazılırsa
$2\cdot(x+y)=6$ olup $x+y=3$ olur. Buradan

$\left.\begin{aligned} x-3y&=2 \\ x+y&=3 \end{aligned}\right\}$ olarak elde edilen denklem sisteminde $x+y=3$ denkleminin her iki tarafı -1 ile çarpılırsa

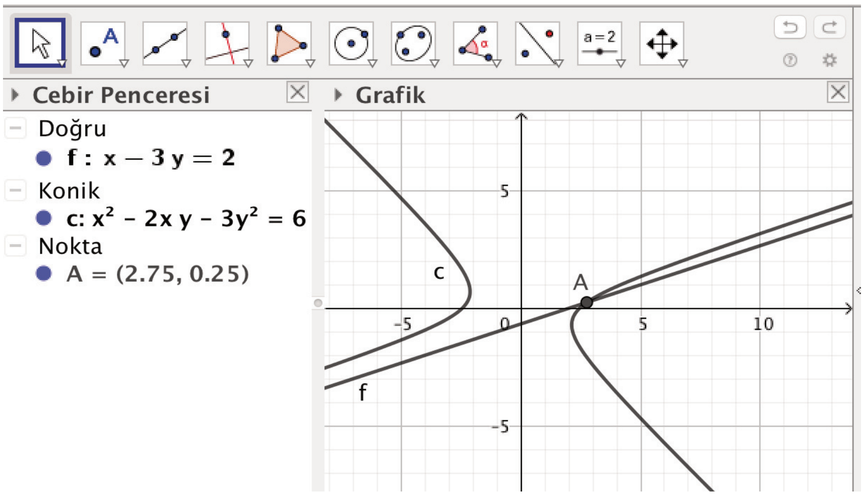
$-x-y=-3$ olur. Elde edilen bu denklem $x-3y=2$ denklemi ile taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{array}{rl} & x-3y=2 \\ + & -x-y=-3 \\ \hline & -4y=-1 \Rightarrow y=\frac{1}{4}=0{,}25 \text{ olur.} \end{array}$$

$y=\frac{1}{4}$ için $x-3y=2 \Rightarrow x-3\cdot\frac{1}{4}=2 \Rightarrow x=2+\frac{3}{4} \Rightarrow x=\frac{11}{4}=2{,}75$ olur.

Buradan verilen denklem sisteminin $ÇK=\{(2{,}75\ ,\ 0{,}25)\}$ olarak yazılır.

Elde edilen çözüm kümesi dinamik matematik yazılımı kullanılarak aşağıdaki gibi gösterilebilir. Dinamik matematik yazılımını açarak Giriş bölümüne $x^2-2xy-3y^2=6$ yazınız ve "ENTER" tuşuna basınız. Benzer şekilde Giriş bölümüne $x-3y=2$ yazınız ve "ENTER" tuşuna basınız. Araç çubuğundaki ikinci kutuya ve ardından açılan Nokta sekmesine tıklayınız. Daha sonra grafiklerin kesişim noktasına tıklanırsa bu noktanın çözüm kümesinin elemanı olduğu görülür.



Örnek 5

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2-xy-4=0 \\ x-2y=5 \end{aligned}\right\}$$ denklem sisteminin çözüm kümesini cebirsel yolla bulup grafik yardımıyla yorumlayınız.

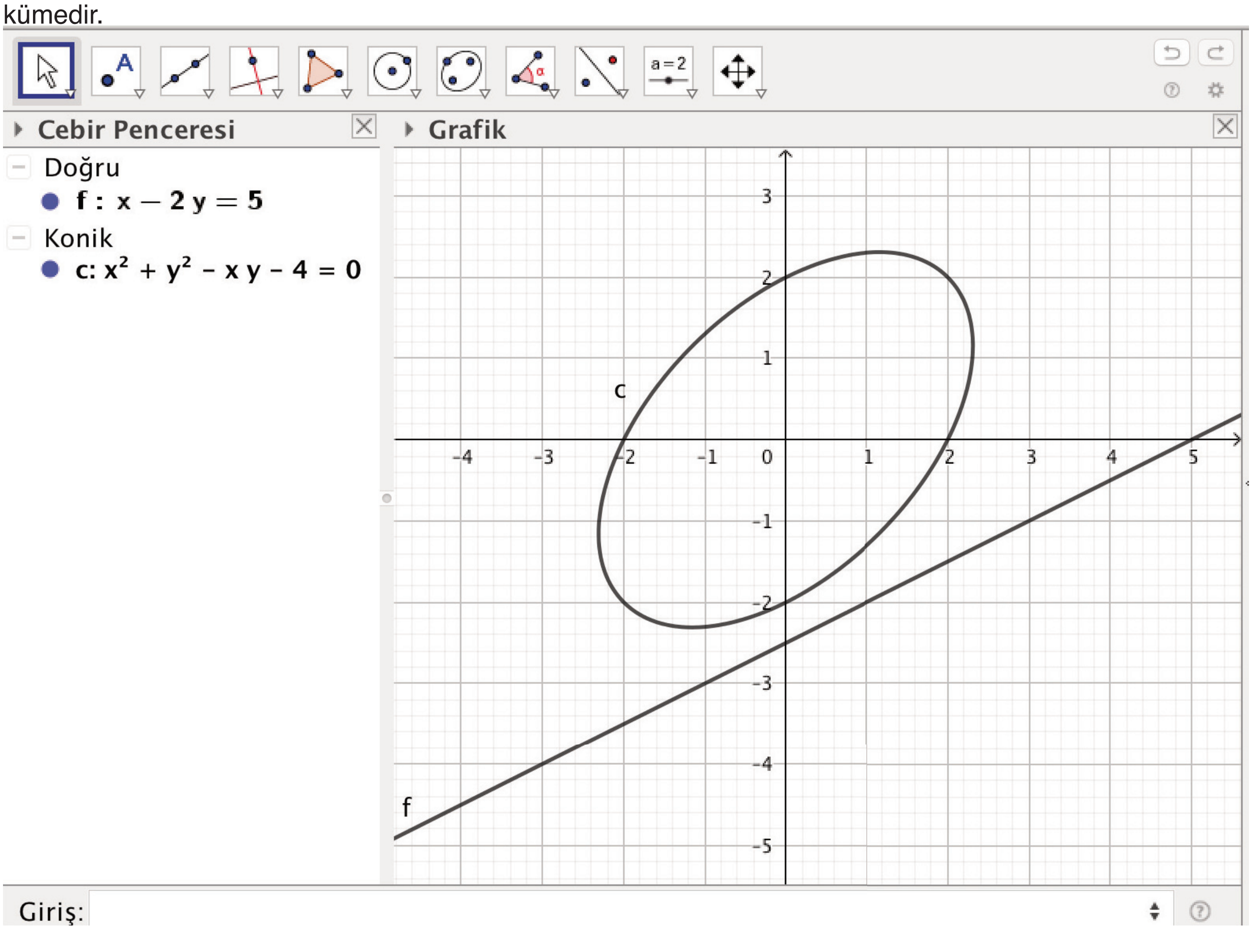
Çözüm

$x-2y=5$ ise $x=2y+5$ olup $x^2+y^2-xy-4=0$ denkleminde x yerine $2y+5$ yazılırsa

$$(2y+5)^2+y^2-(2y+5)\cdot y-4=0$$
$$4y^2+20y+25+y^2-2y^2-5y-4=0$$
$$3y^2+15y+21=0$$ denklemi elde edilir.

Bu denklem için $\triangle=b^2-4ac=15^2-4\cdot3\cdot21=-27$ olur. $\triangle<0$ olduğundan denklemin gerçek kökleri yoktur. Buradan y değerine bağlı olarak herhangi bir x gerçek sayısı da bulunamayacağından verilen denklem sisteminin çözüm kümesi $\varnothing$ olur.

Elde edilen çözüm kümesi dinamik matematik yazılımı kullanılarak aşağıdaki gibi gösterilebilir. Dinamik matematik yazılımını açarak Giriş bölümüne $x^2+y^2-xy-4=0$ yazınız ve "ENTER" tuşuna basınız. Benzer şekilde Giriş bölümüne $x-2y=5$ yazınız ve "ENTER" tuşuna basınız. Grafiklere bakıldığında birbirlerini kesmedikleri görülür. Çözüm kümesi verilen fonksiyon grafiklerinin kesim noktalarıdır. Aşağıda çizilen grafiklerin kesim noktaları olmadığından verilen denklem sisteminin çözüm kümesi boş kümedir.



ALIŞTIRMALAR

1. Çarpımları -4, toplamları $\frac{15}{2}$ olan gerçek sayı ikililerini bulunuz.

2. $x^2 - y^2 = 12$
$x - y = 2$
olarak verilen denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

3. $\frac{a}{b} = 4$
$a \cdot b = 1$
olarak verilen denklem sistemini sağlayan (a, b) gerçek sayı ikililerini bulunuz.

4. $\left.\begin{array}{l} \frac{x}{y} = x - \frac{9}{4} \\ y = x + 1 \end{array}\right\}$ olarak verilen denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

5. $x^2 - y + 4x - 6 = 0$
$x + y = 0$
olarak verilen denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

6. $x^2 - y^2 - x = 0$
$x + y + 1 = 0$
denklem sisteminin çözüm kümesini cebirsel yolla bulup grafik yardımıyla yorumlayınız.

7. $3x^2 + 2y^2 - 4y = 10$
$x^2 - y^2 + 2y = -8$
denklem sisteminin çözüm kümesini cebirsel yolla bulup grafik yardımıyla yorumlayınız.

8. $y = 2x^2 + 6x + 11$ ve $y = x^2 + 2x + 8$ eğrilerinin kesim noktaları arasındaki uzaklığın kaç birim olduğunu bulunuz.

11.4.2. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlik ve Eşitsizlik Sistemleri

Terimler ve Kavramlar
- İkinci Dereceden Eşitsizlikler

Neler Öğreneceksiniz?

- Bir bilinmeyenli eşitsizliklerin çözüm kümesini oluşturmayı,
- İkinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümesini oluşturmayı öğreneceksiniz.

11.4.2.1. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

Bilgi

$a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ olmak üzere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ ikinci dereceden bir bilinmeyenli fonksiyonu verilsin. $f(x) > 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) < 0$ ve $f(x) \leq 0$ eşitsizliklerine **ikinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikler** denir. Verilen eşitsizliği sağlayan x gerçek sayılarının kümesine **eşitsizliğin çözüm kümesi** denir.

İpucu

$a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ olmak üzere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ denkleminde a katsayısının işareti ile f(x)'in işareti arasındaki ilişkiyi elde etmek için f(x) aşağıdaki gibi düzenlenir.

$f(x) = ax^2 + bx + c = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}\right)$ denkleminde parantez içindeki ifadeye $\frac{b^2}{4a^2}$ eklenir ve $\frac{b^2}{4a^2}$ çıkarılırsa

$$a \cdot \Big(\underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}}_{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2} + \underset{(4a)}{\frac{c}{a}} - \frac{b^2}{4a^2}\Big) = a \cdot \left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a \cdot \left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$ olur.

Elde edilen $f(x) = a \cdot \left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$ eşitliğinde

1. $\Delta < 0$ ise $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$ ve $\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) > 0$ olur. Bu durumda

$f(x) = a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ denkleminde a'nın işareti ile f(x)'in işaretinin aynı olduğu görülür.

Bu duruma uygun bir işaret tablosu aşağıdaki gibi yapılabilir.

x	$-\infty$ ∞
$f(x) = ax^2 + bx + c$	a ile aynı işaretli

2. $\Delta = 0$ ise $f(x) = a \cdot \left(\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right) \Rightarrow f(x) = a \cdot \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ olur.

Bu durumda $x \neq -\dfrac{b}{2a}$ ve $\forall x \in \mathbb{R}$ için $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 > 0$ olduğundan $f(x) = a \cdot \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ denkleminde a'nın işareti ile f(x)'in işaretinin aynı olduğu görülür. Bu duruma uygun bir işaret tablosu aşağıdaki gibi yapılabilir.

x	$-\infty$	$x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$	∞
$f(x) = ax^2 + bx + c$	a ile aynı işaretli	○○	a ile aynı işaretli

3. $f(x) = ax^2 + bx + c$ ifadesinde $\Delta > 0$ ise $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin farklı iki gerçek kökü vardır. Bu kökler x_1 ve x_2 olmak üzere $x_1 < x_2$ olsun. Bu durumda $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ olarak yazılabilir.

- $x < x_1 < x_2$ ise $x - x_1 < 0$ ve $x - x_2 < 0$ olur. Buradan $(x - x_1) \cdot (x - x_2) > 0$ olduğu görülür. Bu durumda $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ ifadesinde x değişkeninin işareti ne olursa olsun f(x) ile a'nın işareti birbiriyle aynı olur.
- $x_1 < x < x_2$ ise $x - x_1 > 0$ ve $x - x_2 < 0$ olur. Buradan $(x - x_1) \cdot (x - x_2) < 0$ olduğu görülür. Bu durumda $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ ifadesinde x değişkeninin işareti ne olursa olsun a ile f(x)'in işareti birbiriyle ters olur.
- $x_1 < x_2 < x$ ise $x - x_1 > 0$ ve $x - x_2 > 0$ olur. Buradan $(x - x_1) \cdot (x - x_2) > 0$ olduğu görülür. Bu durumda $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ ifadesinde x değişkeninin işareti ne olursa olsun a ile f(x)'in işareti birbiriyle aynı olur.

Yukarıda verilen durumlar için aşağıdaki işaret tablosu yapılabilir.

x	$-\infty$	x_1		x_2	∞
$f(x) = ax^2 + bx + c$	a ile aynı işaretli	○	a ile ters işaretli	○	a ile aynı işaretli

İşaret tablosu oluşturulurken kullanılacak gösterimler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

	Pay		Payda	
	Tek kat	Çift kat	Tek kat	Çift kat
Çözüm kümesine dâhil	●	●●	‖○‖	‖○○‖
Çözüm kümesine dâhil değil	○	○○	‖○‖	‖○○‖

Örnek 6

Gerçek sayılar kümesinde tanımlı $f(x) = -x^2 + 2x - 4$ fonksiyonunun alacağı değerlerin işaret tablosunu yapınız.

Çözüm

$f(x) = -x^2 + 2x - 4$ üç terimlisinde $a = -1$, $b = 2$, $c = -4$ olup $\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \cdot (-1)(-4) = -12$ bulunur. $\Delta < 0$ olduğundan $\forall x \in \mathbb{R}$ için $-x^2 + 2x - 4$ ifadesinin alabileceği değerlerin işareti ile a'nın işareti aynı olup negatiftir. Bu durumda işaret tablosu aşağıdaki gibi yapılabilir.

x	$-\infty$			∞
$f(x) = -x^2 + 2x - 4$	$-$	$-$	$-$	$-$

Verilen tabloda $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) < 0$ olduğuna dikkat ediniz.

Örnek 7

Gerçek sayılar kümesinde tanımlı $f(x)=x^2-6x+9$ fonksiyonunun alacağı değerlerin işaret tablosunu yapınız.

Çözüm

$f(x)=x^2-6x+9$ üç terimlisinde $a=1$, $b=-6$ ve $c=9$ olup $\Delta=(-6)^2-4\cdot1\cdot9=36-36=0$ bulunur.
Buradan $x^2-6x+9=0$ denkleminin çakışık iki kökü olduğu görülür. Bu kökler
$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{-(-6)}{2\cdot1}=3$ olur.

$x^2-6x+9=0$ için $(x-3)^2=0$ ve $x_1=x_2=3$ olur. $a=1>0$ olduğundan x^2-6x+9 üç terimlisinin işaret tablosu aşağıdaki gibi yapılabilir.

x	$-\infty$		3		∞
$f(x)=x^2-6x+9$		$+$		$+$	

Örnek 8

Gerçek sayılar kümesinde tanımlı $f(x)=x^2-3x-4$ fonksiyonunun alacağı değerlerin işaret tablosunu yapınız.

Çözüm

$f(x)=x^2-3x-4$ üç terimlisinde $a=1$, $b=-3$ ve $c=-4$ olmak üzere $\Delta=(-3)^2-4\cdot1\cdot(-4)=25$ bulunur. $\Delta>0$ olduğundan $x^2-3x-4=0$ denkleminin birbirinden farklı iki gerçek kökü vardır. Bu kökler, $x^2-3x-4=0\Rightarrow(x-4)(x+1)=0\Rightarrow x_1=-1$ ve $x_2=4$ olur. $a=1>0$ olmak üzere x^2-3x-4 üç terimlisinin işaret tablosu aşağıdaki gibi yapılabilir.

x	$-\infty$		-1		4		∞
$f(x)=x^2-3x-4$		$+$		$-$		$+$	

Sıra Sizde

Gerçek sayılar kümesinde tanımlı $f(x)=x^2-7x-8$ fonksiyonunun alacağı değerlerin işaret tablosunu yapınız.

Örnek 9

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere x^2+x+2 üç terimlisi verilmektedir. Buna göre

a) x^2+x+2 üç terimlisinin işaret tablosunu yapıp $x^2+x+2>0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

b) İşaret tablosundan faydalanarak $x^2+x+2 \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

c) Dinamik matematik yazılımı kullanarak $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+2$ fonksiyonunun grafiğini çizip $x^2+x+2>0$ ve $x^2+x+2 \leq 0$ eşitsizliklerinin çözüm kümelerini bulunuz.

Çözüm

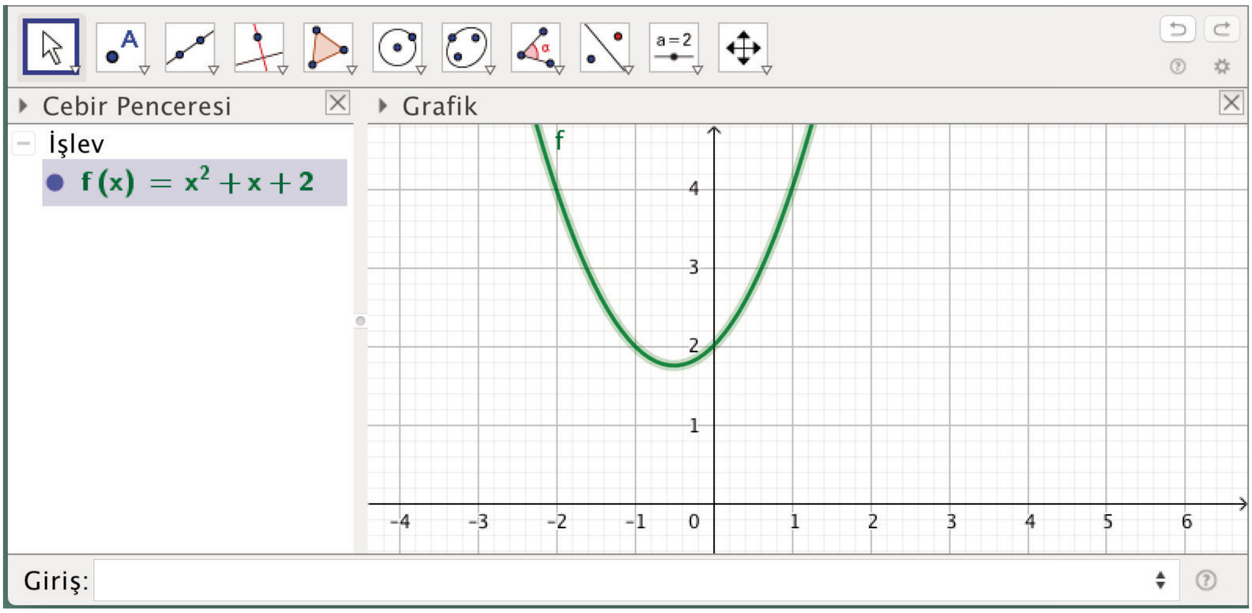
a) x^2+x+2 üç terimlisinde $a=1$, $b=1$ ve $c=2$ olup $\Delta = b^2-4ac = 1^2-4 \cdot 1 \cdot 2 = -7$ bulunur. $\Delta < 0$ olduğundan $\forall x \in \mathbb{R}$ için x^2+x+2 ifadesinin alabileceği değerlerin işareti ile a'nın işareti aynı yani pozitif olur. Bu durumda işaret tablosu aşağıdaki gibi yapılabilir.

x	$-\infty$		∞
x^2+x+2	$+$	$+$	$+$

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $x^2+x+2>0$ olduğundan $x^2+x+2>0$ eşitsizliğinin $\text{ÇK}=\mathbb{R}$ olur.

b) $\forall x \in \mathbb{R}$ için $x^2+x+2>0$ olduğundan $x^2+x+2 \leq 0$ eşitsizliğini sağlayan x gerçek sayısı bulunamaz. Dolayısıyla $x^2+x+2 \leq 0$ eşitsizliğinin $\text{ÇK}=\varnothing$ olur.

c) Dinamik matematik yazılımı açılıp alttaki "Giriş" bölümüne x^2+x+2 yazılıp "ENTER" tuşuna basılırsa "Grafik" ekranında $f(x)=x^2+x+2$ fonksiyonunun grafiği görülür. Bu grafiğin x ekseni ile ortak herhangi bir noktası olmadığından $x^2+x+2=0$ denklemini sağlayan herhangi bir x gerçek sayısı yoktur.



Grafiğe göre fonksiyonun görüntü kümesi (x^2+x+2 ifadesinin alabileceği sayısal değerler) y ekseninin pozitif tarafındadır. $x^2+x+2>0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi gerçek sayılar kümesi, $x^2+x+2 \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi boş kümedir.

Örnek 10

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $4x^2 - 4x + 1$ üç terimlisi verilmiştir. Buna göre

a) $4x^2 - 4x + 1$ üç terimlisinin alabileceği değerlerin işaret tablosunu yaparak

- $4x^2 - 4x + 1 \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini,
- $4x^2 - 4x + 1 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

b) Dinamik matematik yazılımı kullanarak $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$ fonksiyonunun grafiğini çizip $4x^2 - 4x + 1 \geq 0$ ve $4x^2 - 4x + 1 < 0$ eşitsizliklerinin çözüm kümelerini yorumlayınız.

Çözüm

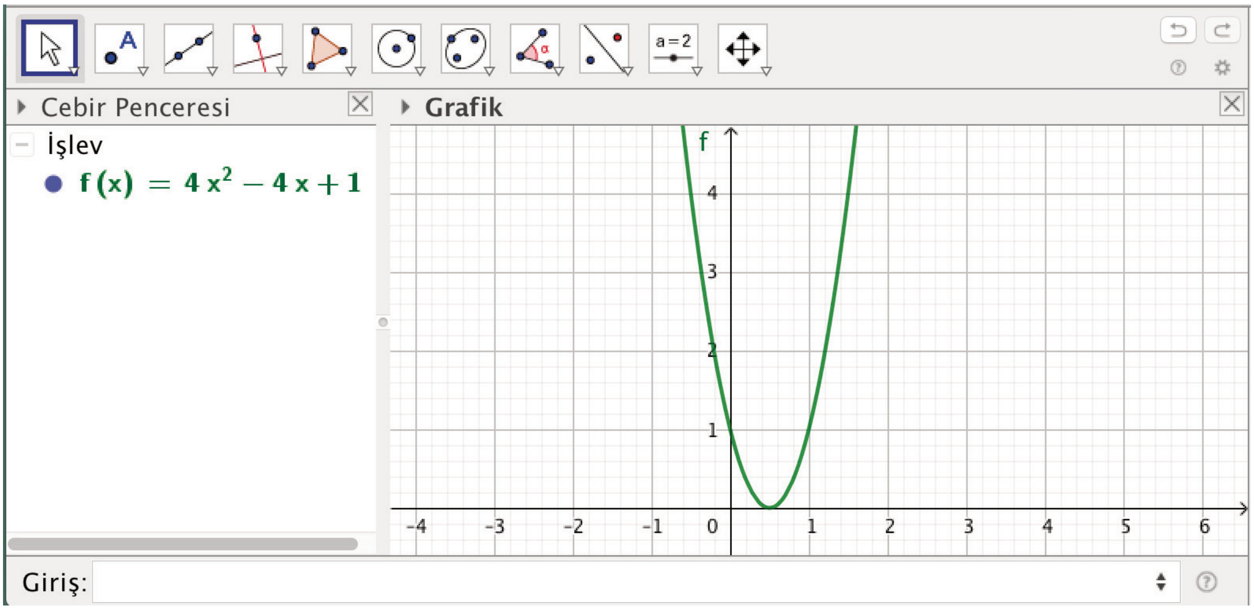
a) $4x^2 - 4x + 1$ üç terimlisinde $a = 4$, $b = -4$ ve $c = 1$ olmak üzere $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0$ bulunur. Buradan $4x^2 - 4x + 1 = 0$ denkleminin çakışık iki kökü olduğu görülür. Bu kökler $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-(-4)}{2 \cdot 4} = \dfrac{1}{2}$ olur.

$a = 4 > 0$ olduğundan $4x^2 - 4x + 1$ üç terimlisinin işaret tablosu aşağıdaki gibi yapılabilir.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		∞
$4x^2 - 4x + 1$		$+$	0 0	$+$	

- Bu tabloda $\forall x \in \mathbb{R}$ için $4x^2 - 4x + 1 \geq 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla $4x^2 - 4x + 1 \geq 0$ eşitsizliğinin ÇK $= \mathbb{R}$ olur.
- $4x^2 - 4x + 1 < 0$ eşitsizliği herhangi bir x gerçek sayısı için sağlanmadığından ÇK $= \varnothing$ olur.

b) Dinamik matematik yazılımı açılıp alttaki "Giriş" bölümüne $4x^2 - 4x + 1$ yazılıp "ENTER" tuşuna basılır. Bu durumda "Grafik" penceresinde $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$ fonksiyonunun grafiği görülür.



Grafik incelendiğinde grafiğin x eksenine teğet olduğu görülür. $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$ fonksiyonunun görüntü kümesi $[0, \infty)$ olduğundan $\forall x \in \mathbb{R}$ için $4x^2 - 4x + 1 \geq 0$ olmaktadır. Dolayısıyla $4x^2 - 4x + 1 \geq 0$ eşitsizliğinin ÇK $= \mathbb{R}$ olur.

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $4x^2 - 4x + 1 \geq 0$ olduğundan $4x^2 - 4x + 1 < 0$ eşitsizliğinin ÇK $= \varnothing$ olur.

Örnek 11

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $2x^2+x-1$ üç terimlisi verilmiştir. Buna göre

a) $2x^2+x-1$ üç terimlisinin alabileceği değerlerin işaret tablosunu yaparak

- $2x^2+x-1>0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini,
- $2x^2+x-1<0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

b) Dinamik matematik yazılımı kullanarak $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2+x-1$ fonksiyonunun grafiğini çizip $2x^2+x-1>0$ ve $2x^2+x-1<0$ eşitsizliklerinin çözüm kümelerini yorumlayınız.

Çözüm

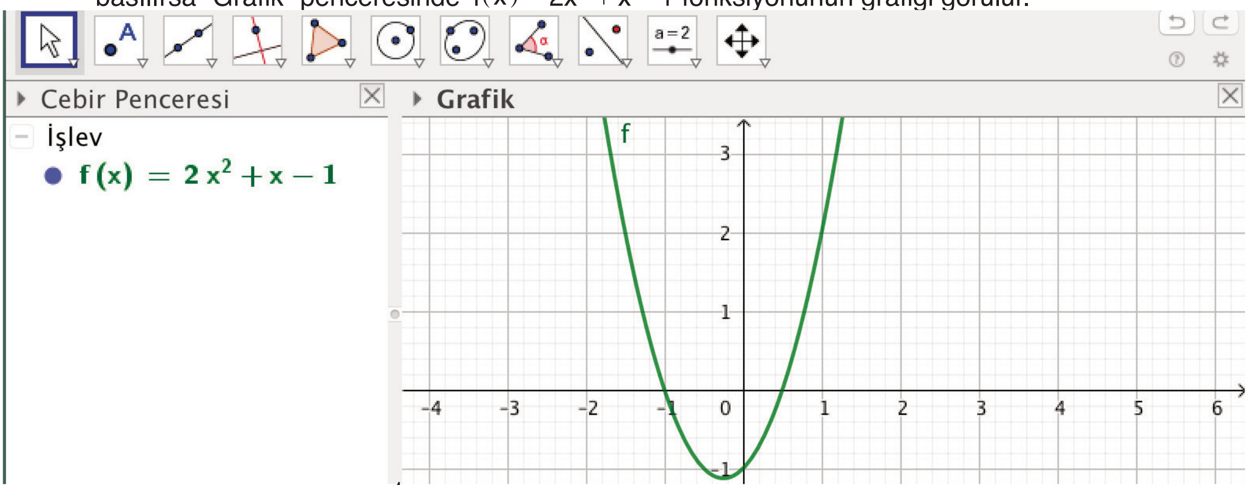
a) $2x^2+x-1$ üç terimlisinde $a=2$, $b=1$ ve $c=-1$ olmak üzere $\Delta=b^2-4ac=1^2-4\cdot2\cdot(-1)=9$ bulunur. $\Delta>0$ olduğundan $2x^2+x-1=0$ denkleminin birbirinden farklı iki gerçek kökü vardır. Bu kökler $2x^2+x-1=0 \Rightarrow (2x-1)\cdot(x+1)=0 \Rightarrow x_1=-1$ ve $x_2=\frac{1}{2}$ olur.

$a=2>0$ olmak üzere $2x^2+x-1$ üç terimlisinin işaret tablosu aşağıdaki gibi yapılabilir.

x	$-\infty$	-1		$\frac{1}{2}$	∞
$2x^2+x-1$	$+$		$-$		$+$

- Buradan $2x^2+x-1>0$ eşitsizliğinin $ÇK=(-\infty,-1)\cup\left(\frac{1}{2},\infty\right)$ olur.
- $2x^2+x-1<0$ eşitsizliğinin $ÇK=\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ olarak bulunur.

b) Dinamik matematik yazılımı açılır ve alttaki “Giriş” bölümüne $2x^2+x-1$ yazılıp “ENTER” tuşuna basılırsa “Grafik” penceresinde $f(x)=2x^2+x-1$ fonksiyonunun grafiği görülür.



Grafik x eksenini -1 ve $\frac{1}{2}$ apsisli noktalarda kestiğinden

- $x<-1$ için fonksiyonun görüntüsü, y eksenindeki noktaların ordinatı olduğundan pozitif,
- $-1<x<\frac{1}{2}$ için fonksiyonun görüntüsü negatif,
- $x>\frac{1}{2}$ için fonksiyonun görüntüsü pozitiftir.

Buradan $2x^2+x-1>0$ eşitsizliğinin $ÇK=(-\infty,-1)\cup\left(\frac{1}{2},\infty\right)$ ve $2x^2+x-1<0$ eşitsizliğinin $ÇK=\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ olarak bulunur.

Sıra Sizde

$x^2 - 4x - 5 \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

İpucu

$a \neq 0$, a, b, $c \in \mathbb{R}$ için

a) $\forall x \in \mathbb{R}$ iken $ax^2 + bx + c > 0$ ise $a > 0$ ve $\Delta < 0$ olmalıdır.

b) $\forall x \in \mathbb{R}$ iken $ax^2 + bx + c < 0$ ise $a < 0$ ve $\Delta < 0$ olmalıdır.

Örnek 12

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $-x^2 + mx - 1 < 0$ eşitsizliği sağlandığına göre m gerçek sayısının değer aralığını bulunuz.

Çözüm

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $-x^2 + mx - 1 < 0$ ise $a < 0$ ve $\Delta < 0$ olmalıdır.
$a = -1 < 0$ olduğundan $\Delta < 0$ şartının sağlanması yeterlidir. Buradan
$\Delta < 0 \Rightarrow m^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) < 0 \Rightarrow m^2 - 4 < 0$ eşitsizliği elde edilir.

Değişkeni m olan 2. dereceden bir bilinmeyenli $m^2 - 4 = 0$ denkleminin kökleri $m_1 = -2$ ve $m_2 = 2$ olur.
$m^2 - 4$ ifadesinin işaret tablosu aşağıdaki gibi yapılabilir.

m	$-\infty$	-2		2		∞
$m^2 - 4$	+	o	−	o	+	

Buradan $m^2 - 4 < 0$ eşitsizliğini sağlayan m değerlerinin aralığı $(-2, 2)$ olur.

Sıra Sizde

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $2x^2 - 4x + m - 1 > 0$ olduğuna göre m gerçek sayısının değer aralığını bulunuz.

İpucu

$a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ax + b$ biçimindeki ifadelerin işaretleri incelenirken $ax + b = 0$ için $x = -\frac{b}{a}$ bulunup $ax + b$'ye ait işaret tablosu aşağıdaki gibi yapılabilir.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	∞
$ax + b$	a ile ters işaretli		a ile aynı işaretli

$ax + b > 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b < 0$ ve $ax + b \leq 0$ biçimindeki eşitsizliklerin çözüm kümesini bulmak için yukarıdaki işaret tablosu kullanılabilir.

Örnek 13

$3x - 12 > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

$3x - 12 = 0 \Rightarrow x = 4$ olur ve işaret tablosu aşağıdaki gibidir.

x	$-\infty$	4	∞
$3x - 12$	$-$		$+$

Buradan $3x - 12 > 0$ eşitsizliğinin $ÇK = (4, \infty)$ olur.

Sıra Sizde

$12x - 60 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Örnek 14

$(x^2-5x-6)\cdot(-x+8)<0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

1. yol

Verilen eşitsizlik x^2-5x-6 ve $-x+8$ ifadelerinin çarpımından oluşmuştur. Bu ifadeler sıfıra eşitlenerek elde edilen denklemlerden x değerleri bulunur ve bu değerler işaret tablosundaki sayı doğrusuna yerleştirilir. x^2-5x-6 ile $-x+8$ ifadelerinin işaretleri tabloda ayrı ayrı gösterilir. Verilen ifadeler çarpım durumunda olduğundan işaretlerin bulunduğu aralıklardaki işaretler çarpılarak $(x^2-5x-6)\cdot(-x+8)$ ifadesinin sayı doğrusunda belirlenen aralıklar için işaretleri bulunur.

$x^2-5x-6=0 \Rightarrow (x-6)\cdot(x+1)=0 \Rightarrow x_1=-1$ veya $x_2=6$ olur.

$-x+8=0 \Rightarrow x_3=8$ olur.

x	$-\infty$		-1		6		8		∞
x^2-5x-6		$+$		$-$		$+$		$+$	
$-x+8$		$+$		$+$		$+$		$-$	
$(x^2-5x-6)\cdot(-x+8)$		$+$		$-$		$+$		$-$	

Tablo incelendiğinde $(x^2-5x-6)\cdot(-x+8)<0$ eşitsizliğinin $ÇK=(-1,\ 6)\cup(8,\ \infty)$ olduğu görülür.

2. yol

Bir eşitsizliği oluşturan ifadeler çarpım veya bölüm durumunda ise her ifade 0'a eşitlenerek oluşan denklemlerden elde edilen kökler sayı doğrusuna yerleştirilir. Eşitsizliği oluşturan ifadelerde en büyük dereceli terimlerin katsayıları (başkatsayıları) çarpılır. Bulunan bu sayının işareti tablonun en sağındaki aralığın işaretidir. Çift katlı köklerde kökün sağındaki ve solundaki komşu aralıkların işaretleri aynı olmak şartıyla diğer aralıkların işaretleri sağdan sola doğru işaret değiştirilerek yazılır.

$$\left.\begin{array}{r}(x^2-5x-6) \text{ nın başkatsayısı } 1\\ (-x+8) \text{ in başkatsayısı } -1\end{array}\right\}\ 1\cdot(-1)=-1 \text{ olup işareti negatiftir.}$$

Dolayısıyla işaret tablosunun en sağındaki aralıkta $(x^2-5x-6)\cdot(-x+8)$ ifadesi negatif değerler alır.

x	$-\infty$		-1		6		8		∞
$(x^2-5x-6)\cdot(-x+8)$		$+$		$-$		$+$		$-$	

Buradan $ÇK=(-1,\ 6)\cup(8,\ \infty)$ olarak bulunur.

Örnek 15

$\dfrac{x^2+x-6}{x-1} \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

$x^2+x-6=0 \Rightarrow (x+3)\cdot(x-2)=0 \Rightarrow x_1=-3$ veya $x_2=2$ olur. Ayrıca paydadaki ifade için $x-1=0 \Rightarrow x_3=1$ olur.

$$\left.\begin{array}{r} (x^2+x-6) \text{ nın başkatsayısı } 1 \\ (x-1) \text{ in başkatsayısı } 1 \end{array}\right\} \dfrac{1}{1}=1 \text{ olup bölme işleminin işareti pozitiftir.}$$

Dolayısıyla aşağıdaki işaret tablosunun en sağındaki aralıkta $\dfrac{x^2+x-6}{x-1}$ ifadesi pozitif değerler alır.

x	$-\infty$		-3		1		2		∞
$\dfrac{x^2+x-6}{x-1}$		$-$	●	$+$	○	$-$	●	$+$	

Buradan $ÇK=[-3,\ 1)\cup[2,\ \infty)$ olarak bulunur.
-3 ve 2 değerlerinin verilen eşitsizliği sağladığından çözüm kümesine dâhil edildiğine, 1 değerinin ise paydayı 0 yaptığından çözüm kümesine dâhil edilmediğine dikkat ediniz.

Örnek 16

$(2x-3)\cdot(x^2-4x+4) \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

$2x-3=0 \Rightarrow x_1=\dfrac{3}{2}$
$x^2-4x+4=0 \Rightarrow (x-2)^2=0$ ve $x_2=x_3=2$ olur. Bu durumda $x^2-4x+4=0$ denkleminin çift katlı kökü vardır.

$$\left.\begin{array}{r} (2x-3) \text{ ün başkatsayısı } 2 \\ (x^2-4x+4) \text{ ün başkatsayısı } 1 \end{array}\right\} 2\cdot 1=2 \text{ olup işareti pozitiftir.}$$

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		2		∞
$(2x-3)(x^2-4x+4)$		$-$	●	$+$	●●	$+$	

$ÇK=\left(-\infty,\ \dfrac{3}{2}\right]\cup\{2\}$ olarak bulunur.

$x=2$ değerinin çift katlı kök olduğu için sağındaki ile solundaki komşu aralıklarda $(2x-3)\cdot(x^2-4x+4)$ ifadesinin aynı işaretli olduğuna ve eşitsizliği sağladığından çözüm kümesine dâhil edildiğine dikkat ediniz.

Sıra Sizde

$\dfrac{x^2+3x-4}{4-x^2}<0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

İpucu

Eşitsizlik çözümlerinde ifadelerin sıfıra eşitlenmesi sonucunda oluşan denklemlerden elde edilen aynı köklerin sayısı 2 veya 2'nin katı kadar ise bu kökler çift katlı köklerdir. İşaret tablosunda bu köklerin sağındaki ve solundaki komşu aralıklarda verilen ifade aynı işaretlidir.

Örnek 17

$\dfrac{(-x^2+3x-5)\cdot(x^2-9)}{x^2-x-6}\geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

$-x^2+3x-5=0 \Rightarrow \Delta=3^2-4\cdot(-1)\cdot(-5)=-11$ olur. $\Delta<0$ olduğundan bu denklemin gerçek kökü yoktur.
$x^2-9=0 \Rightarrow x_1=3$ veya $x_2=-3$ olur.
$x^2-x-6=0 \Rightarrow x_3=3$ veya $x_4=-2$ olur.

Elde edilen köklerden $x_1=x_3=3$ olup 3 çift katlı köktür.

$$\left.\begin{array}{r}(-x^2+3x-5) \text{ in başkatsayısı } -1\\ (x^2-9) \text{ un başkatsayısı } 1\\ (x^2-x-6) \text{ nın başkatsayısı } 1\end{array}\right\}\ \frac{(-1)\cdot(1)}{1}=-1 \text{ olup işareti negatiftir.}$$

Dolayısıyla aşağıdaki işaret tablosunun en sağındaki aralıkta $\dfrac{(-x^2+3x-5)\cdot(x^2-9)}{x^2-x-6}$ ifadesi negatiftir.

x	$-\infty$		-3		-2		3		∞
$\dfrac{(-x^2+3x-5)\cdot(x^2-9)}{x^2-x-6}$		$-$	●	$+$	○	$-$	○	$-$	

Buradan $ÇK=[-3,-2)$ olarak bulunur.

Örnek 18

$\dfrac{6}{x^2+7x}<-1$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

$$\frac{6}{x^2+7x} < -1 \Rightarrow \frac{6}{x^2+7x} + \underset{(x^2+7x)}{\frac{1}{1}} < 0 \Rightarrow \frac{x^2+7x+6}{x^2+7x} < 0 \text{ olur.}$$

$x^2+7x+6=0 \Rightarrow (x+6)(x+1)=0$ ve $x_1=-6$ veya $x_2=-1$ elde edilir.

$x^2+7x=0 \Rightarrow x(x+7)=0 \Rightarrow x_3=0$ veya $x_4=-7$ olur.

(x^2+7x+6) ifadesinin başkatsayısı 1 ve x^2+7x ifadesinin başkatsayısı 1 olmak üzere $\frac{x^2+7x+6}{x^2+7x}$ ifadesinin işareti $\frac{1}{1}=1$ olup pozitiftir. Dolayısıyla aşağıdaki işaret tablosunun en sağındaki aralıkta $\frac{x^2+7x+6}{x^2+7x}$ ifadesi pozitiftir. İşaret tablosu aşağıdaki gibi yapılabilir.

x	$-\infty$	-7		-6		-1		0		∞
$\frac{x^2+7x+6}{x^2+7x}$	$+$		$-$		$+$		$-$		$+$	

Buradan $ÇK=(-7,-6)\cup(-1,0)$ olarak bulunur.

Örnek 19

Yandaki şekilde verilen uzun kenarı kısa kenarından 20 metre fazla olan dikdörtgen biçimindeki bir parkın yüzölçümü $\frac{3}{2}$ dekardan az ise bu parkın kısa kenarının alabileceği değer aralığını bulunuz.

Çözüm

1 dekar 1000 m^2 olduğundan $\frac{3}{2}$ dekar $\frac{3}{2}\cdot 1000=1500$ m^2 olur. Parkın kısa kenarı x metre olursa uzun kenarı $(x+20)$ metre olur. Parkın yüzölçümü (kapladığı alan) ise $x\cdot(x+20)$ m^2 dir. Parkın yüzölçümü 1500 m^2 den az ise bu durum matematiksel olarak $x\cdot(x+20)<1500$ yani $x^2+20x-1500<0$ eşitsizliği ile gösterilir. $x^2+20x-1500=0 \Rightarrow (x+50)(x-30)=0$ olup $x_1=-50$ ve $x_2=30$ olur.
Buradan $x^2+20x-1500$ ifadesinin işaret tablosu aşağıdaki gibi yapılabilir.

x	$-\infty$	-50		30		∞
$x^2+20x-1500$	$+$		$-$		$+$	

Buradan $-50<x<30$ bulunur. Buradan dikdörtgenin kenar uzunluğu sıfır veya negatif olamayacağından x'in değer aralığı $(0, 30)$ olur.

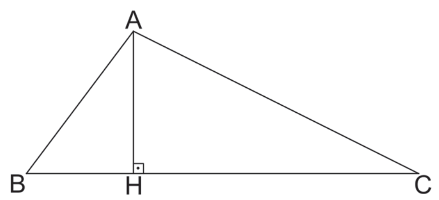
ALIŞTIRMALAR

1. Bir gerçek sayının karesi alınıp elde edilen sayıdan ilk sayının 4 katı çıkarılıyor. Elde edilen sonuç bir negatif sayı olduğuna göre bu sayının alabileceği kaç farklı tam sayı değeri olduğunu bulunuz.

2. $\dfrac{49-x^2}{-x^2+6x} > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

3. $a < b$ olmak üzere $a, b \in \mathbb{R}$ için verilen $\dfrac{x^2-(a+b)\cdot x+a\cdot b}{a-x} \le 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

4.



Yukarıdaki şekilde verilen ABC üçgeninde $[AH] \perp [BC]$ ve $|BC| = |AH| + 6$ cm olarak verilmektedir. ABC üçgeninin alanı $36\ cm^2$ den küçük olduğuna göre $|AH|$'nun alabileceği **en büyük** tam sayı değerini bulunuz.

5. $\dfrac{-x^2-3x+28}{x^2-100} > 0$ eşitsizliğini sağlayan tam sayı değerlerinin toplamını bulunuz.

6. $(x^2-3x-10)\cdot(x^2-10x+25) < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

7. $(-2x+6)\cdot(2x^2-3x+1) \le 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

8. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $-x^2+(m-3)x-9 < 0$ eşitsizliği sağlandığına göre m gerçek sayısının değer aralığını bulunuz.

9. $\dfrac{(16-x^2)\cdot(x^2-5x)}{(x^2-4x)\cdot(2x-10)} \le 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

10. $\dfrac{x^2-36}{6x-x^2} \ge 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

11. $a \in \mathbb{R}$ ve $a > 0$ olmak üzere $\dfrac{-x^2+ax}{x^2-2ax+a^2} > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

11.4.2.2. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlik Sistemleri

Bilgi

İki veya daha fazla eşitsizliğin oluşturduğu sisteme **eşitsizlik sistemi** denir. Bir eşitsizlik sistemindeki tüm eşitsizlikleri sağlayan değerlerin kümesine **eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi** denir.

Örnek 1

$\left.\begin{array}{r} 2x^2 - x - 3 < 0 \\ -x^2 + 2x \geq 0 \end{array}\right\}$ eşitsizlik sisteminin gerçek sayılar kümesinde çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

$2x^2 - x - 3$ ile $-x^2 + 2x$ ifadelerinin alabileceği değerlerin işaretleri aynı tabloda incelenerek $2x^2 - x - 3 < 0$ ve $-x^2 + 2x \geq 0$ eşitsizliklerinin her ikisini de sağlayan sayı aralığı bu eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi olarak alınır.

$2x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow (2x-3)\cdot(x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}$ veya $x_2 = -1$ olur.

$-x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(-x+2) = 0 \Rightarrow x_3 = 0$ veya $x_4 = 2$ olur.

Bu değerlere göre işaret tablosu aşağıdaki gibi yapılabilir.

x	$-\infty$ … -1	-1 … 0	0 … $\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$ … 2	2 … ∞
$2x^2 - x - 3$	+	−	−	+	+
$-x^2 + 2x$	−	−	+	+	−

İşaret tablosunda $2x^2 - x - 3 < 0$ ve $-x^2 + 2x \geq 0$ eşitsizliklerinin her ikisini sağlayan sayı aralığının $\left[0, \frac{3}{2}\right)$ olduğu görülmektedir. Dolayısıyla verilen eşitsizlik sisteminin $ÇK = \left[0, \frac{3}{2}\right)$ olur.

0 sayısı her iki eşitsizliği de sağladığından çözüm kümesine dâhil edildiğine dikkat ediniz.

Sıra Sizde

$\left.\begin{array}{r} 25 - x^2 \geq 0 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \end{array}\right\}$ eşitsizlik sistemini sağlayan tam sayıların toplamını bulunuz.

Örnek 2

$0 < x^2 + 4x \leq 5$ eşitsizlik sisteminin gerçek sayılar kümesinde çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

Verilen eşitsizlik sistemi $0 < x^2 + 4x$ ve $x^2 + 4x \leq 5$ eşitsizliklerinden oluşmuştur. Bu durum

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + 4x > 0 \\ x^2 + 4x - 5 \leq 0 \end{array}\right\}$$

olarak da gösterilebilir. Buradan $x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(x+4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ veya $x_2 = -4$
$x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow (x+5)(x-1) = 0 \Rightarrow x_3 = 1$ veya $x_4 = -5$ olur.

Bulunan bu değerlere göre işaret tablosu aşağıdaki gibi yapılabilir.

x	$-\infty$		-5		-4		0		1		∞
$x^2 + 4x$		$+$		$+$		$-$		$+$		$+$	
$x^2 + 4x - 5$		$+$		$-$		$-$		$-$		$+$	

İşaret tablosunda $x^2 + 4x > 0$ ve $x^2 + 4x - 5 \leq 0$ eşitsizliklerinin her ikisini de sağlayan sayı aralığının $[-5, -4) \cup (0, 1]$ olduğu görülür. Dolayısıyla $0 < x^2 + 4x \leq 5$ eşitsizlik sisteminin
$ÇK = [-5, -4) \cup (0, 1]$ olur.

Örnek 3

$$\left.\begin{array}{r} -x^2 + 3x - 5 < 0 \\ \dfrac{x^2+3}{x^2-1} < 0 \end{array}\right\}$$

eşitsizlik sisteminin gerçek sayılar kümesinde çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

$-x^2 + 3x - 5 = 0$ denkleminde $\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5) = -11 < 0$ olduğundan bu denklemin gerçek kökleri yoktur. Bu durumda $a = -1 < 0$ ve $\Delta < 0$ olduğundan $\forall x \in \mathbb{R}$ iken $-x^2 + 3x - 5 < 0$ olur.
$x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = -3$ olup bu denklemin gerçek kökleri yoktur.
$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1$ veya $x_2 = -1$ olur. Bu değerlere göre işaret tablosu aşağıdaki gibi yapılabilir.

x	$-\infty$		-1		1		∞
$-x^2 + 3x - 5$		$-$		$-$		$-$	
$\dfrac{x^2+3}{x^2-1}$		$+$		$-$		$+$	

İşaret tablosunda $-x^2 + 3x - 5 < 0$ ve $\dfrac{x^2+3}{x^2-1} < 0$ eşitsizliklerinin her ikisini de sağlayan sayı aralığının $(-1, 1)$ olduğu görülür. Dolayısıyla verilen eşitsizlik sisteminin $ÇK = (-1, 1)$ olur.

Sıra Sizde

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-10}{2-x} \leq 0 \\[2ex] \dfrac{x^2-6x+8}{x^2+1} \geq 0 \end{array}\right\}$$ eşitsizlik sisteminin gerçek sayılar kümesinde çözüm kümesini bulunuz.

Örnek 4

$-4 \leq x^2 - 2x - 4 \leq 4$ eşitsizliğinin çözüm kümesini sağlayan kaç tane tam sayı olduğunu bulunuz.

Çözüm

$-4 \leq x^2 - 2x - 4 \leq 4$ ifadesi $-4 \leq x^2 - 2x - 4$ ve $x^2 - 2x - 4 \leq 4$ eşitsizliklerinden oluşmuştur. Buradan $0 \leq x^2 - 2x$ ve $x^2 - 2x - 8 \leq 0$ olur. Bu durum

$$\left.\begin{array}{r} x^2-2x \geq 0 \\ x^2-2x-8 \leq 0 \end{array}\right\}$$ olarak ifade edilebilir. Buradan

$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ ve $x_2 = 2$ olur.
$x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+2) = 0 \Rightarrow x_3 = 4$ ve $x_4 = -2$ olur.

Bulunan bu değerlere göre işaret tablosu aşağıdaki gibi yapılabilir.

x	$-\infty$	-2	0	2	4	∞
x^2-2x	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	
x^2-2x-8	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	

İşaret tablosunda $x^2 - 2x \geq 0$ ve $x^2 - 2x - 8 \leq 0$ eşitsizliklerinin her ikisini de sağlayan sayı aralığının $[-2, 0] \cup [2, 4]$ olduğu görülür. Bu aralıktaki tam sayılar ise $-2, -1, 0, 2, 3, 4$ olup toplam 6 tanedir.

Sıra Sizde

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{1}{x} > x \\[2ex] \dfrac{x+2}{x^2-5x+6} > 0 \end{array}\right\}$$ eşitsizlik sisteminin gerçek sayılar kümesinde çözüm kümesini bulunuz.

ALIŞTIRMALAR

1. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere x ile ilgili aşağıdaki bilgiler verilmektedir.

- Karesi 81'den küçüktür.
- 3 fazlası $\frac{15}{2}$'den büyüktür.

Bu şartları sağlayan x gerçek sayılarının değer aralığını bulunuz.

2. $-x^2+20x \geq 0$

$x^2-9>0$

eşitsizlik sisteminin gerçek sayılar kümesinde çözüm kümesini bulunuz.

3. $(x^2+16)\cdot(10-x) \leq 0$

$\frac{x+8}{4-x} \leq 0$

eşitsizlik sisteminin gerçek sayılar kümesinde çözüm kümesini bulunuz.

4. $m \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x^2-8x+2m>0$ eşitsizliği $\forall x \in \mathbb{R}$ için sağlandığına göre m'nin alabileceği **en küçük** tam sayı değerini bulunuz.

5. $m \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=-(m+5)x^2+(m+2)\cdot x-1$ fonksiyonunun grafiği $\forall x \in \mathbb{R}$ için x ekseninin alt kısmında kalıyorsa m'nin değer aralığını bulunuz.

6. $\frac{x^2-7x}{5-x} \leq 0$

$\frac{(x^2-5x)\cdot(49-x^2)}{x^2-12x+35} \leq 0$

eşitsizlik sisteminin gerçek sayılar kümesinde çözüm kümesini bulunuz.

7. Bir oyun parkına yapılacak havuzla ilgili aşağıdaki bilgiler veriliyor.

- Havuzun yapılacağı dikdörtgen şeklindeki bölgenin uzun kenarı kısa kenarından 3 metre fazladır.
- Bölgenin alanı en az 10 en çok 40 metrekaredir.

Verilen bilgilere göre

a) Havuzun yapılacağı dikdörtgen şeklindeki bölgenin kısa kenarının metre cinsinden alabileceği kaç farklı tam sayı olduğunu bulunuz.

b) Havuzun yapılacağı bölgenin çevre uzunluğunun en çok kaç metre olduğunu bulunuz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

A) Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerlere uygun ifadeyi yazınız.

1. İkinci dereceden iki bilinmeyenli bir denklem sistemini oluşturan eğrilerin grafikleri kesişmediğine göre bu denklem sisteminin çözüm kümesi .... olur.

2. $a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c$ üç terimlisinin işaret tablosunda en sağdaki aralıkta $ax^2 + bx + c$ ifadesinin işareti daima .... katsayısının işareti ile aynıdır.

3. $a \neq 0$, a, b, $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere
$\forall x \in \mathbb{R}$ için $ax^2 + bx + c < 0$ ise
$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde $\triangle$ ve a katsayısı için .... koşulları sağlanmalıdır.

B) Aşağıdaki açık uçlu soruların doğru cevabını ilgili boşluklara yazınız.

4. $x^2 + 4y = 52$
$y - 3x^2 = 0$

denklem sisteminin gerçek sayılar kümesinde çözüm kümesini bulunuz.

5. $x^2 - 3y^2 + 2x - 15 = 0$
$y^2 - x + 1 = 0$

denklem sisteminin gerçek sayılar kümesinde çözüm kümesini bulunuz.

6. $\dfrac{(-x^2 + x - 1)\cdot(x^2 - 4x - 5)}{x^2 - 9} \geq 0$ eşitsizliğinin gerçek sayılar kümesinde çözüm kümesini bulunuz.

7 - 8. soruları aşağıda verilen bilgilere göre cevaplandırınız.

Bir şirkette son 10 yıllık zaman diliminin değerlendirileceği sunumla ilgili aşağıdaki bilgiler verilmiştir.

I. 2000 yılında 60 000 Türk lirası kâr elde edilmiştir.
II. x zamanı göstermek üzere 2000 yılından itibaren geçen 10 yıllık zaman $1 \leq x \leq 10$ ile gösterilmiştir.
III. Bu süreçte kâr zarar durumu f(x) ile gösterilmiştir.

$f(x) = 10\,000x^2 - 70\,000x + 60\,000$ olduğuna göre

7. Şirket hangi yıldan sonra 2000 yılındaki kârından daha fazla kâr elde etmeye başlamıştır.

8. Şirket hangi yıllarda kâr etmemiştir.

C) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruların doğru seçeneğini işaretleyiniz.

9. $x^2 - 2y = 4y^2 - x$
$y = x + 1$

denklem sistemi veriliyor. Buna göre aşağıdakilerden hangisi verilen denklem sisteminin çözüm kümesinin bir elemanıdır?

A) $(-2, 1)$ B) $(1, 2)$ C) $(-2, -1)$
D) $(-3, -2)$ E) $(0, 1)$

10. $\dfrac{x^2-10x+21}{x^2-9}<0$

eşitsizliğini sağlayan **en büyük** ve **en küçük** tam sayının toplamı kaçtır?

A) −6 B) −4 C) 4 D) 6 E) 8

11. $-x^2+6x \geq 0$

$\dfrac{x^2-9}{5-x} \geq 0$

eşitsizlik sistemini sağlayan tam sayıların toplamı kaçtır?

A) 3 B) 7 C) 8 D) 12 E) 18

12. $\dfrac{(16-x^2)\cdot(x-5)}{-x^2+4x}>0$

eşitsizliğini sağlayan aralıklardan biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty, -4)$ B) $(-4, 0)$ C) $(0, 4)$ D) $(0, 5)$ E) $(4, 5)$

13. $-1<\dfrac{x-4}{x+2}<1$

eşitsizlik sisteminin gerçek sayılar kümesinde çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty, -2)$ B) $(-\infty, 1)$ C) $(-2, 1)$ D) $(-2, \infty)$ E) $(1, \infty)$

14. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $mx^2-(m+3)x-1<0$

eşitsizliği sağlandığına göre m gerçek sayısının alabileceği **en büyük** tam sayı değeri kaçtır?

A) 0 B) −1 C) −2 D) −8 E) −9

15. $\dfrac{(x^2-25)\cdot(x^2-2x-15)}{(9-x^2)\cdot(-x^2-1)}>0$

eşitsizliğini sağlayan **en küçük** doğal sayı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

16. Taban kenarları 2 metre ve x metre olan dikdörtgenler prizması şeklindeki bir zeytinyağı deposu ile ilgili aşağıdaki bilgiler verilmiştir.

I. Yüksekliği $x+3$ metredir.
II. Depodaki zeytinyağı miktarı gün içinde en az 216 000 litre olmuştur.
III. Depodaki zeytinyağı miktarı aynı gün içinde en çok 360 000 litre olmuştur.

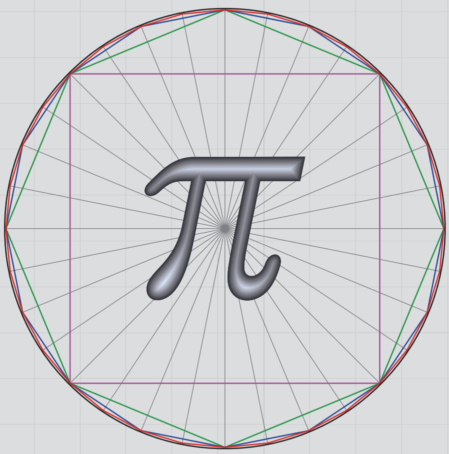
Buna göre depodaki zeytinyağının yüksekliği gün içinde hangi metreler arasında değer almıştır ($1m^3=1000$ litre)?

A) [9, 12] B) [6, 12] C) [6, 9] D) [10, 14] E) [12, 15]

DEĞERLENDİRME

Cevaplarınızı cevap anahtarı ile karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorularla ilgili konuları veya faaliyetleri geri dönerek tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.

GEOMETRİ



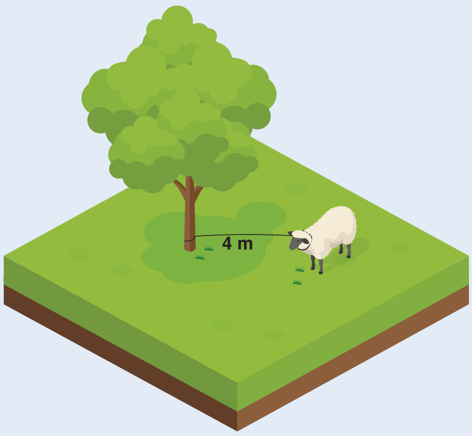
5

Çember ve Daire

- 11.5.1. Çemberin Temel Elemanları
- 11.5.2. Çemberde Açılar
- 11.5.3. Çemberde Teğet
- 11.5.4. Dairenin Çevresi ve Alanı

11.5. ÇEMBER VE DAİRE

Hazırlık Çalışması

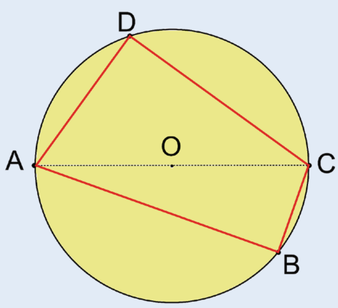
1. 

Yandaki şekilde verilen koyun ağaca en fazla 4 m uzaklıktaki otları yiyebilecek şekilde bağlanmıştır. Koyunun otlayabileceği alanın en fazla kaç m^2 olduğunu bulunuz.

2. Rehberlik uzmanı Müge Hanım sınava hazırlanan Betül için aşağıdaki tabloda verilen saat dilimlerine göre hafta içi bir günlük program hazırlamıştır.

Günlük Plan	*Uygulama Süresi*
Okul	7,5 saat
Yemek	2 saat
Ders Çalışma	4 saat
Serbest Zaman	3,5 saat
Uyku	7 saat

Buna göre yukarıdaki tabloda verilen etkinlik süreleri bir daire grafiğinde gösterildiğinde "Ders Çalışma" etkinliği için oluşturulan daire diliminin merkez açısının kaç derece olacağını bulunuz.

3. 

Yanda verilen $[AC]$ çaplı daire şeklindeki arsada A, B, C ve D noktalarına birer direk dikilmiştir. Bu direkler yere paralel ve dörtgen oluşturacak şekilde bir sıra iple bağlanmıştır. $|AC| = 25$ m, $|BC| = 7$ m ve $|AD| = 15$ m olduğuna göre ipin toplam uzunluğunun **en az** kaç metre olduğunu bulunuz.

Hayati ihtiyaçlarını topraktan sağlayan ve hayvancılıkla geçinen ilk çağ insanları yük taşımak için önce hayvan gücünden faydalandılar. Sonra tekerleğin icadıyla hayvan gücüne ek olarak tekerleği kullandılar. İlk başlarda basit yükleri taşıma düşüncesiyle icad edilen ilkel tekerlek; günümüzde karayollarında araçlar, demir yollarında trenler, hava taşımacılığında uçaklar ve daha birçok alanda kullanılmaktadır.

Giyinmek ilk çağda soğuktan korunmak için bir ihtiyaç olarak görülmüştür. Sonraları bulunulan bölgenin iklim koşullarına ve kültürel yapısına göre giysi türleri şekillenmiştir. Giyinme ihtiyacını karşılamak için ip üretiminde kullanılmak üzere çıkrık geliştirilmiş; çıkrık ile eğrilen ipten kumaş, bu kumaştan da çeşitli giysiler ve nesneler üretilmiştir.

Çıkrık, su kuyularında daha az enerji ile daha güvenli şekilde su ihtiyacının karşılanmasını sağlamış, dev binaların yapımında kullanılan vinçlere ilham kaynağı olmuştur. Her gün büyük çoğunluğumuzun kullandığı asansörlerin en önemli parçalarından biri olan makaranın ana şekli de çıkrık gibi bir çemberdir.

Bu bölümde ilk çağlardan beri araştırmaların merkezindeki konularda önemli bir rolü bulunan ve bilime katkı sağlayan çember ve daireye ait bazı özellikleri inceleyeceksiniz.

11.5.1. Çemberin Temel Elemanları

Terimler ve Kavramlar
- Çember
- Merkez
- Çap
- Yarıçap
- Kiriş
- Teğet
- Kesen
- Yay

Sembol ve Gösterimler
- r
- R
- $\overset{\frown}{AB}$
- $\overset{\frown}{ABC}$
- $m(\overset{\frown}{AB})$
- π

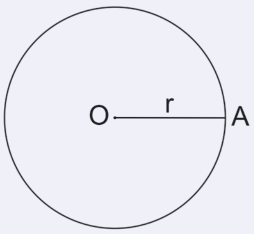
Neler Öğreneceksiniz?

- Çemberde teğet, kiriş, çap, yay ve kesen kavramlarını açıklamayı,
- Çemberde kirişin özelliklerini göstererek işlemler yapmayı öğreneceksiniz.

11.5.1.1. Çemberde Teğet, Kiriş, Çap, Yay ve Kesen

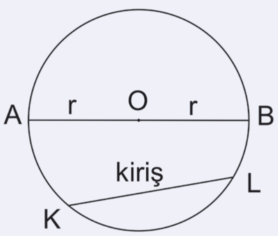
Bilgi

Düzlemde sabit bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesine **çember** denir. Sabit noktaya çemberin merkezi, sabit uzaklığa da çemberin **yarıçap uzunluğu** denir.



- Yandaki çemberin merkezi O noktası,
- $[OA]$ çemberin yarıçapı,
- $|OA| = r$ çemberin yarıçap uzunluğudur.

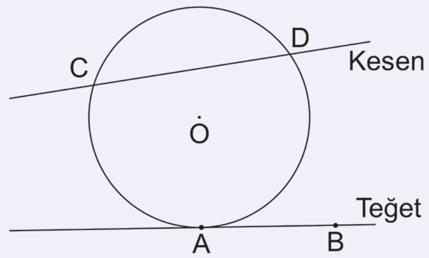
Bir çemberin farklı iki noktasını birleştiren doğru parçasına çemberin bir **kirişi** denir. Merkezden geçen kirişe **çap** denir.



Yandaki O merkezli çemberde $[KL]$ ve $[AB]$ kiriştir. $[AB]$ çemberin merkezinden geçtiğinden çaptır ve $|AB| = 2r$ olur.

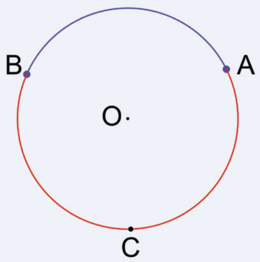
Bilgi

Bir çemberle bir doğru yalnız bir noktada kesişiyorsa bu doğruya **teğet** denir.
Bir doğru çemberi iki noktada kesiyorsa bu doğruya **kesen** denir.

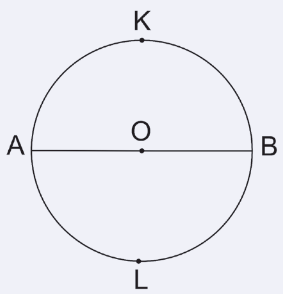


- AB doğrusu, A noktasında çembere teğet;
- CD doğrusu kesendir.

Çemberin üzerinde alınan farklı iki nokta arasında kalan çember parçasına **yay** denir. Çemberin üzerinde alınan A ve B gibi iki farklı nokta çemberde iki yay oluşturur. AB yayı denildiğinde bu yaylardan küçük olanı anlaşılır. Büyük yayı ifade etmek için büyük yay üzerinde aşağıda verilen şekildeki gibi başka bir C noktası alınır ve ACB yayı biçiminde ifade edilir.



- AB yayı $\overset{\frown}{AB}$,
- ACB yayı $\overset{\frown}{ACB}$,
- AB yayının ölçüsü $m(\overset{\frown}{AB})$,
- ACB yayının ölçüsü $m(\overset{\frown}{ACB})$ şeklinde ifade edilir.
- AB yayının uzunluğu $|\overset{\frown}{AB}|$, ACB yayının uzunluğu ise $|\overset{\frown}{ACB}|$ şeklinde ifade edilir.

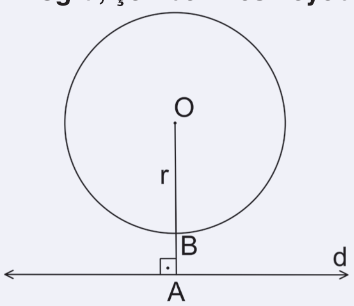


- Bir çemberin çevresi 360° dir.
- Çap çemberi iki eş ölçülü yaya ayırır.
- Yandaki O merkezli $[AB]$ çaplı çemberde $m(\overset{\frown}{AKB}) = m(\overset{\frown}{ALB}) = 180^\circ$ olur.

Bilgi

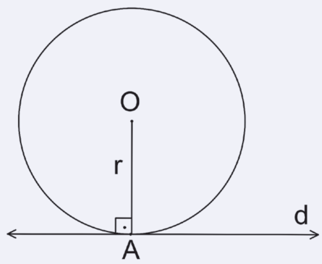
Bir çember ile bir doğrunun birbirine göre üç farklı durumu vardır.

I. Doğru, çemberi kesmeyebilir.



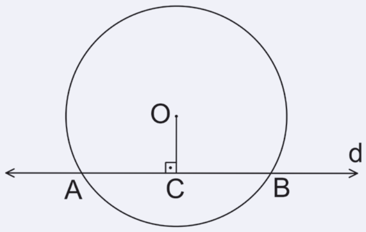
$A \in d$, O çemberin merkezi olmak üzere $[OA] \perp d$ ve $|OA| > r$ ise d doğrusu çemberi **kesmez.**

II. Doğru, çembere teğet olabilir.



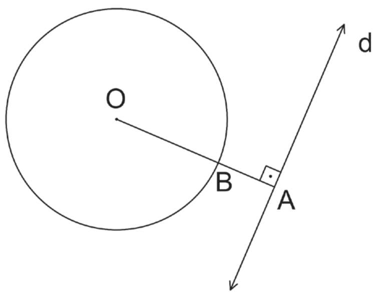
$A \in d$, O çemberin merkezi olmak üzere $[OA] \perp d$ ve $|OA| = r$ ise d doğrusu çembere **teğettir.**

III. Doğru, çemberi iki farklı noktada kesebilir.



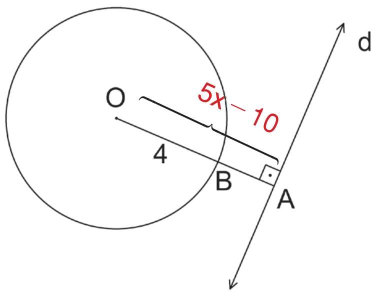
$A, B, C \in d$, O çemberin merkezi olmak üzere $[OC] \perp d$ ve $|OC| < r$ ise d doğrusu çemberi farklı iki noktada **keser.**

Örnek 1



Yandaki şekilde O merkezli bir çember ve bu çemberi kesmeyen bir d doğrusu verilmiştir. $A \in d$, $[OA] \perp d$ ve O, B, A noktaları doğrusaldır. $|OA| = (5x - 10)$ cm ve çemberin yarıçap uzunluğu 4 cm olduğuna göre x'in en küçük tam sayı değerini bulunuz.

Çözüm



d doğrusu çemberi kesmediğinden $|OA|$ çemberin yarıçap uzunluğundan daha büyüktür. Buradan

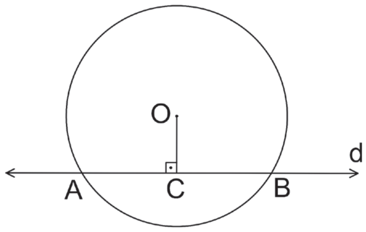
$$5x - 10 > 4$$

$$5x > 14$$

$$x > \frac{14}{5} = 2,8 \text{ olur.}$$

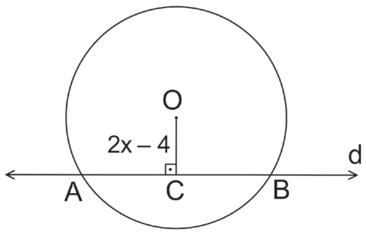
Bu durumda x'in en küçük tam sayı değeri 3 bulunur.

Örnek 2



Yandaki şekilde O merkezli bir çember ve bu çemberi A ve B noktalarında kesen bir d doğrusu verilmiştir. $C \in d$, $[OC] \perp d$ ve A, C, B noktaları doğrusaldır. $|OC| = (2x - 4)$ cm ve çemberin çapı 12 cm olduğuna göre x'in kaç farklı tam sayı değeri olduğunu bulunuz.

Çözüm



Çemberin çapı 12 cm olduğundan yarıçapı $r = 6$ cm olur. d doğrusu çemberi iki farklı noktada kestiğinden $|OC| < r$ olup

$2x - 4 < 6$

$2x < 10$

$x < 5$ olur.

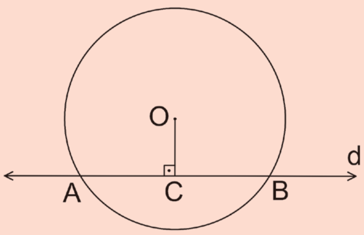
Ayrıca $|OC| > 0$ olacağından $2x - 4 > 0$

$2x > 4$

$x > 2$ olur.

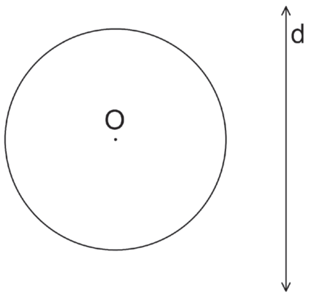
$x < 5$ ve $x > 2$ eşitsizliklerinin ortak çözümünden $2 < x < 5$ olup x'in alacağı tam sayı değerler 3 ve 4'tür. Buradan x'in 2 farklı tam sayı değeri bulunur.

Sıra Sizde



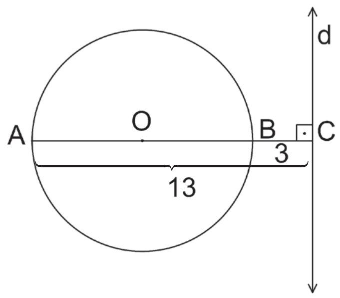
Yandaki şekilde O merkezli bir çember ve bu çemberi A ve B noktalarında kesen bir d doğrusu verilmiştir. $|OC| = (3x - 8)$ cm ve çemberin yarıçapı 4 cm olduğuna göre x'in kaç farklı tam sayı değeri olduğunu bulunuz.

Örnek 3



Yandaki şekilde O merkezli bir çember ve bir d doğrusu verilmiştir. d doğrusunun çemberin herhangi bir noktasına uzaklığı en fazla 13 cm, en az 3 cm olduğuna göre çemberin yarıçap uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

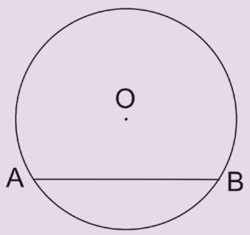
Çözüm



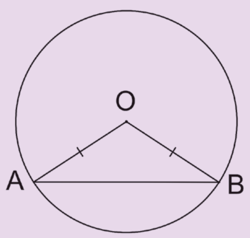
$C \in d$, $[AC] \perp d$ olacak şekilde O noktasından geçen ve çemberi A, B noktalarında kesen $[AC]$ çizilsin. Bu durumda çemberin d doğrusuna en uzak noktası A, en yakın noktası B olur. $|AC| = 13$ cm ve $|BC| = 3$ cm olup çemberin çapının uzunluğu $|AB| = |AC| - |BC| = 13 - 3 = 10$ cm olur. Buradan çemberin yarıçap uzunluğu $\frac{10}{2} = 5$ cm bulunur.

11.5.1.2. Çemberde Kiriş Özellikleri

Buluyorum

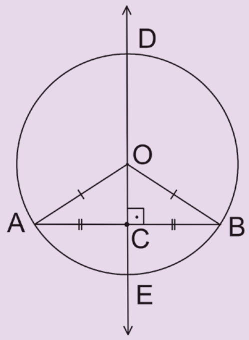


Yandaki şekilde $[AB]$, O merkezli çemberin bir kirişi olsun.



Çemberin merkezi A ve B noktaları ile birleştirlirse $|OA| = |OB|$ olup $\widehat{AOB}$ ikizkenar üçgen olur.

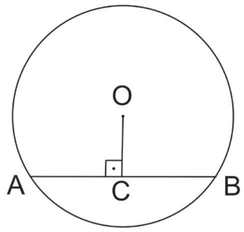
AOB ikizkenar üçgeninin tabanının orta noktası işaretlenip C noktası olarak isimlendirilip O ile C noktaları aşağıda verilen şekildeki gibi birleştirilsin. Oluşan ACO ile BCO üçgenleri eş üçgenlerdir (K.K.K. eşliği). Buradan $m(\widehat{ACO}) = m(\widehat{BCO}) = 90^\circ$ olur. Bu durumda $[AB]$ kirişinin orta dikme doğrusu olan DE doğrusu, çemberin merkezinden geçer.



Ayrıca $[OC] \perp [AB]$ olduğundan çemberin merkezi ile kirişin orta noktasını birleştiren doğru kirişe dik olur.

Yukarıda verilen durumun tersi de doğru olup çemberin merkezinden kirişe indirilen dikme, kirişi eşit uzunlukta iki parçaya böler.

Örnek 4



Yandaki şekilde verilen O merkezli çemberde C noktası $[AB]$ kirişi üzerindedir. $[OC] \perp [AB]$, $|AC| = (2x - 1)$ cm ve $|CB| = (x + 4)$ cm olduğuna göre $|AB|$'nun kaç cm olduğunu bulunuz.

Çözüm

Bir çemberde merkezden kirişe çizilen dikme kirişi iki eşit parçaya böleceğinden $|AC| = |CB|$ olur. Buradan $2x - 1 = x + 4 \Rightarrow x = 5$ elde edilir.

$|AB| = |AC| + |CB|$

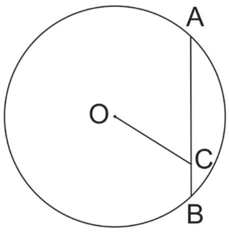
$|AB| = 2x - 1 + x + 4$

$|AB| = 3x + 3$

$|AB| = 3 \cdot 5 + 3$

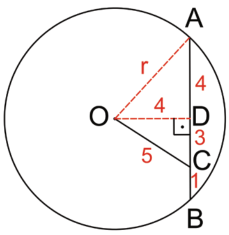
$|AB| = 18$ cm bulunur.

Örnek 5



Yandaki şekilde verilen O merkezli çemberde $[AB]$ kiriştir. $C \in [AB]$, $|AC| = 7$ cm, $|CB| = 1$ cm ve $|OC| = 5$ cm olduğuna göre çemberin yarıçap uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

Çözüm

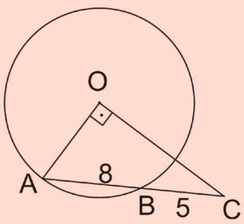


$[AB]$'nın orta noktası işaretlenip bu noktaya D denilir ve O noktası ile birleştirilirse $[OD] \perp [AB]$ olur. $|AD| = |DB| = \frac{|AB|}{2} = 4$ cm olacağından $|DC| = 7 - 4 = 3$ cm olur. ODC dik üçgeninde Pisagor teoremi ile $|OD| = 4$ cm bulunur.

OAD dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

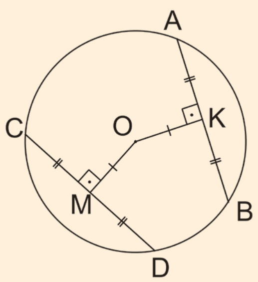
$$|OA|^2 = |OD|^2 + |AD|^2$$
$$r^2 = 4^2 + 4^2$$
$$r^2 = 16 + 16$$
$$r^2 = 32$$
$$r = 4\sqrt{2} \text{ cm bulunur.}$$

Sıra Sizde



Yandaki şekilde verilen O merkezli çemberde A, B, C noktaları doğrusal; $[AO] \perp [OC]$; $|AB| = 8$ cm ve $|BC| = 5$ cm olduğuna göre çemberin yarıçap uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

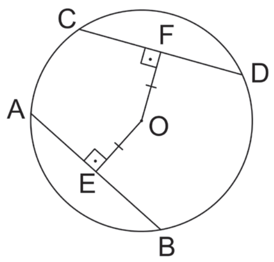
İpucu



Yandaki O merkezli çemberde $[AB]$ ve $[CD]$ çemberin kirişleri olmak üzere O merkez noktasından kirişlere dikmeler indirildiğinde $|AB| = |CD|$ ise $|OM| = |OK|$ olur.

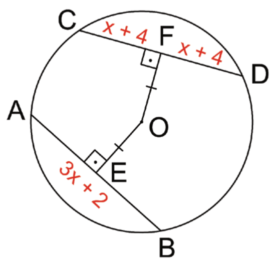
Bir çemberde eşit uzunluktaki kirişlerin merkeze olan uzaklıkları eşittir.

Örnek 6



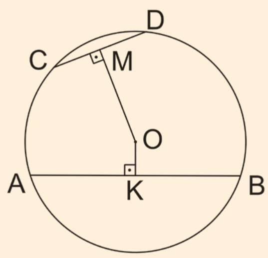
Yandaki şekilde O merkezli çemberde $[AB]$ ve $[CD]$ birer kiriştir. $E \in [AB]$, $F \in [CD]$, $[OE] \perp [AB]$, $[OF] \perp [CD]$ ve $|OE| = |OF|$ verilmiştir. $|AB| = (3x + 2)$ cm ve $|CF| = (x + 4)$ cm olduğuna göre $|CD|$'nun kaç cm olduğunu bulunuz.

Çözüm



$[OF] \perp [CD]$ olduğundan $|CF| = |FD| = (x + 4)$ cm olur. $|OE| = |OF|$ olduğundan $|AB| = |CD|$ olur.
Buradan $3x + 2 = x + 4 + x + 4 \Rightarrow 3x + 2 = 2x + 8 \Rightarrow x = 6$ olur.
Bu durumda istenen uzunluk
$|CD| = x + 4 + x + 4 = 2x + 8 = 2 \cdot 6 + 8 = 20$ cm olur.

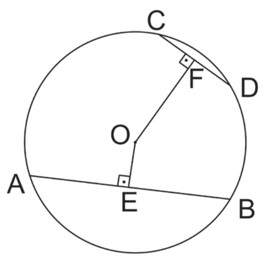
İpucu



Yandaki şekilde verilen O merkezli çemberde $[OK] \perp [AB]$ ve $[OM] \perp [CD]$ olmak üzere $|AB| > |CD|$ ise $|OK| < |OM|$ olur.

Bir çemberin iki kirişinden uzun olanı merkeze daha yakındır.

Örnek 7



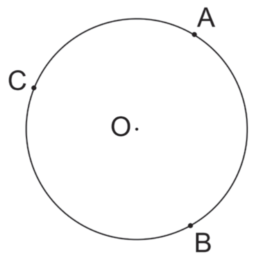
Yandaki şekilde verilen O merkezli, 8 cm yarıçaplı çemberde $[AB]$ ve $[CD]$ birer kiriştir. $E \in [AB]$, $F \in [CD]$, $[OF] \perp [CD]$, $[OE] \perp [AB]$; $|CF| = 3$ cm, $|AB| = (2x - 4)$ cm ve $|OF| > |OE|$ olduğuna göre x'in alabileceği kaç farklı tam sayı değeri olduğunu bulunuz.

Çözüm

$|CD| = |CF| + |FD| = 3 + 3 = 6$ cm olur. $|OF| > |OE| \Rightarrow |CD| < |AB| \Rightarrow 6 < |AB|$ olur. Ayrıca çemberin yarıçapı 8 cm ise çapı 16 cm'dir. $|AB|$ çaptan küçük olmalıdır. Dolayısıyla $6 < |AB| < 16$ olur. Buradan $6 < 2x - 4 < 16 \Rightarrow 10 < 2x < 20 \Rightarrow 5 < x < 10$ olacağından x'in alabileceği tam sayılar 6, 7, 8 ve 9 olup 4 tanedir.

ALIŞTIRMALAR

1.



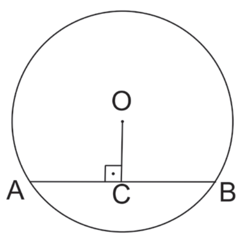
Yukarıdaki şekilde O merkezli bir çember verilmiştir. A, B ve C çember üzerinde noktalardır. Buna göre

a) $[AB]$ kirişini çiziniz.

b) B ve C noktalarından geçen bir kesen çiziniz.

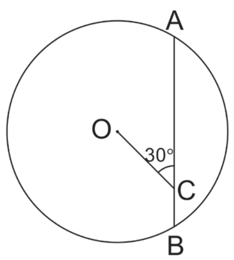
c) C noktasından geçen bir çap çiziniz.

2.



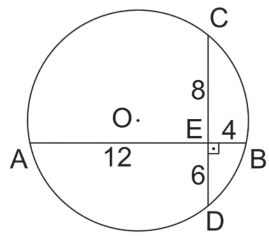
Yukarıdaki şekilde verilen O merkezli çemberde $[AB]$ kiriş, $C \in [AB]$, $[OC] \perp [AB]$, $|AB| = 16$ cm ve $|OC| = 6$ cm olduğuna göre çemberin yarıçap uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

3.



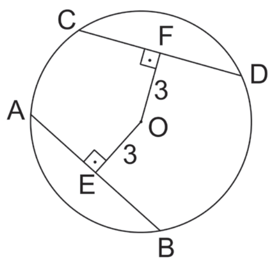
Yukarıdaki şekilde verilen O merkezli çemberde $C \in [AB]$ ve $[AB]$ kiriştir. $|OC| = 6\sqrt{3}$ cm, $|BC| = 4$ cm ve $m(\widehat{OCA}) = 30^\circ$ olduğuna göre çemberin yarıçap uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

4.



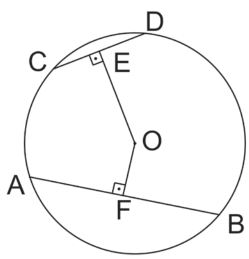
Yukarıdaki şekilde verilen O merkezli çemberde $[AB]$ ve $[CD]$ çemberin birer kirişidir. $[AB] \cap [CD] = \{E\}$, $[CD] \perp [AB]$; $|AE| = 12$ cm, $|EB| = 4$ cm, $|CE| = 8$ cm ve $|ED| = 6$ cm olduğuna göre çemberin yarıçap uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

5.



Yukarıdaki şekilde verilen O merkezli çemberde $[AB]$ ve $[CD]$ çemberin birer kirişidir. $E \in [AB]$, $F \in [CD]$, $[OE] \perp [AB]$ ve $[OF] \perp [CD]$; $|OE| = |OF| = 3$ cm, $|AB| = (x+6)$ cm, ve $|CD| = (2x+4)$ cm olduğuna göre çemberin yarıçap uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

6.



Yukarıdaki şekilde verilen O merkezli çemberde $[AB]$ ve $[CD]$ çemberin birer kirişidir. $E \in [CD]$, $F \in [AB]$, $[OF] \perp [AB]$, $[OE] \perp [CD]$; $|CD| = 3x - 10$ cm, $|AB| = 8$ cm ve $|OE| > |OF|$ olduğuna göre x'in alabileceği kaç farklı tam sayı değeri olduğunu bulunuz.

11.5.2. Çemberde Açılar

Terimler ve Kavramlar
- Merkez Açı
- Çevre Açı
- Teğet - Kiriş Açı
- İç Açı
- Dış Açı

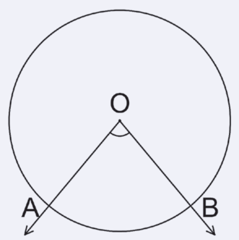
Neler Öğreneceksiniz?

- Bir çemberde merkez, çevre, iç, dış ve teğet-kiriş açıların özelliklerini kullanarak işlemler yapmayı öğreneceksiniz.

11.5.2.1. Bir Çemberde Merkez, Çevre, İç, Dış ve Teğet - Kiriş Açı Özellikleri

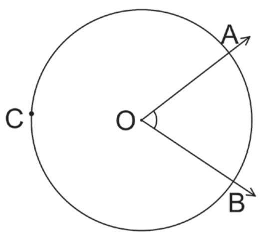
Bilgi

Çemberin merkezinden çıkan iki ışının oluşturduğu açıya **merkez açı** denir.
Merkez açının ölçüsü gördüğü yayın ölçüsüne eşittir.



Yandaki O merkezli çemberde AOB açısı merkez açıdır ve
$m(\widehat{AOB}) = m(\overset{\frown}{AB})$ olur.

Örnek 1



Yandaki şekilde verilen O merkezli çemberde $m(\overset{\frown}{ACB}) = 280^\circ$ ve $m(\widehat{AOB}) = 2x + 10^\circ$ olduğuna göre x'in kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm

$m(\overset{\frown}{ACB}) + m(\overset{\frown}{AB}) = 360^\circ$ olduğundan $280^\circ + m(\overset{\frown}{AB}) = 360^\circ$ ve buradan $m(\overset{\frown}{AB}) = 80^\circ$ elde edilir. AOB açısı merkez açı olduğundan AOB açısının ölçüsü, gördüğü AB yayının ölçüsüne eşittir. Buradan

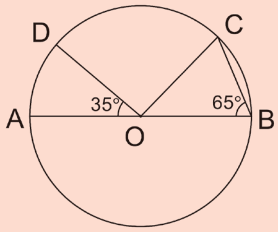
$m(\widehat{AOB}) = m(\overset{\frown}{AB})$

$2x + 10^\circ = 80^\circ$

$2x = 70^\circ$

$x = 35^\circ$ bulunur.

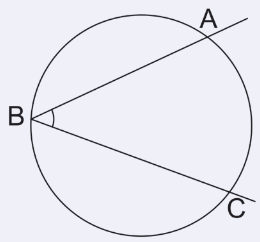
Sıra Sizde



Yandaki şekilde verilen O merkezli, $[AB]$ çaplı çemberde $m(\widehat{DOA}) = 35^\circ$ ve $m(\widehat{CBO}) = 65^\circ$ olduğuna göre $m(\overset{\frown}{DC})$'nün kaç derece olduğunu bulunuz.

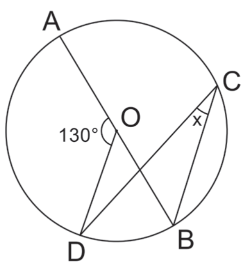
Bilgi

Köşesi çemberin üzerinde olan ve çemberi kesen ışınların oluşturduğu açıya **çevre açı** denir. Çevre açının ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsünün yarısına eşittir.



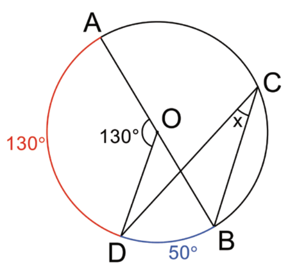
Yandaki çemberde ABC açısı çevre açıdır ve $m(\widehat{ABC}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{AC})}{2}$ olur.

Örnek 2



Yandaki şekilde verilen O merkezli çemberde $[AB]$ çaptır. $m(\widehat{AOD}) = 130^\circ$ ve $m(\widehat{BCD}) = x$ olduğuna göre x'in kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm



$[AB]$ çap olduğundan çemberi iki eş ölçülü yaya böler. $m(\overset{\frown}{ADB}) = 180^\circ$ ve $m(\widehat{AOD}) = m(\overset{\frown}{AD}) = 130^\circ$ olur. Buradan

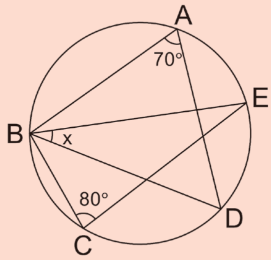
$m(\overset{\frown}{DB}) = 180^\circ - m(\overset{\frown}{AD})$

$m(\overset{\frown}{DB}) = 180^\circ - 130^\circ$

$m(\overset{\frown}{DB}) = 50^\circ$ olur.

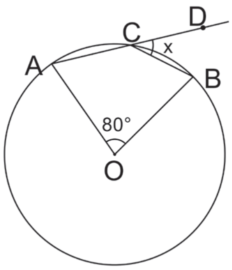
BCD açısı çevre açı olduğundan $x = \dfrac{m(\overset{\frown}{DB})}{2} = \dfrac{50^\circ}{2} = 25^\circ$ bulunur.

Sıra Sizde



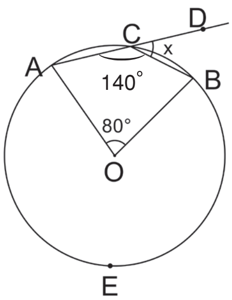
Yandaki şekilde verilen çemberde $m(\widehat{BAD}) = 70^\circ$, $m(\widehat{BCE}) = 80^\circ$ ve $m(\widehat{DBE}) = x$ olduğuna göre x'in kaç derece olduğunu bulunuz.

Örnek 3



Yandaki şekilde verilen O merkezli çemberde A, C, D noktaları doğrusaldır. $m(\widehat{AOB}) = 80^\circ$ ve $m(\widehat{DCB}) = x$ olduğuna göre x'in kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm



$m(\widehat{AOB}) = 80^\circ$ ve merkez açı olduğundan $m(\overset{\frown}{ACB}) = 80^\circ$ olur. E noktası çember üzerinde şekildeki gibi işaretlensin. Buradan

$m(\overset{\frown}{AEB}) = 360^\circ - m(\overset{\frown}{ACB})$

$m(\overset{\frown}{AEB}) = 360^\circ - 80^\circ$

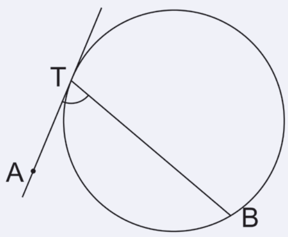
$m(\overset{\frown}{AEB}) = 280^\circ$ olur.

$\widehat{ACB}$ çevre açı olduğundan $m(\widehat{ACB}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{AEB})}{2} = \dfrac{280^\circ}{2} = 140^\circ$ olur.

A, C, D noktaları doğrusal olduğundan $x = 180^\circ - m(\widehat{ACB}) = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$ bulunur.

Bilgi

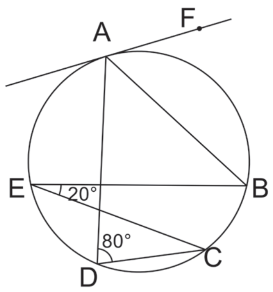
Köşesi çember üzerinde bulunan, kollarından biri çemberin teğeti, diğeri çemberin kirişi olan açıya **teğet-kiriş açı** denir. Bir teğet-kiriş açının ölçüsü gördüğü yayın ölçüsünün yarısına eşittir.



Yandaki şekilde verilen çemberde AT doğrusu çembere T noktasında teğet ve [TB] kiriştir. ATB açısı teğet-kiriş açı olduğundan

$m(\widehat{ATB}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{TB})}{2}$ olur.

Örnek 4



Yandaki şekilde verilen çemberde AF doğrusu çembere A noktasında teğettir. $m(\widehat{BEC}) = 20^\circ$ ve $m(\widehat{ADC}) = 80^\circ$ olduğuna göre BAF açısının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm

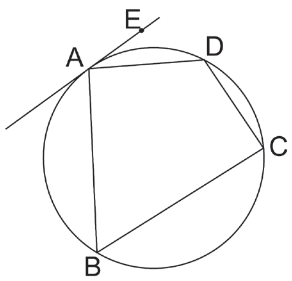
$m(\widehat{ADC}) = 80^\circ$ ve ADC açısı çevre açı olduğundan $m(\overparen{ABC}) = 2 \cdot 80^\circ = 160^\circ$ olur. Benzer şekilde $m(\widehat{BEC}) = 20^\circ$ ve BEC açısı çevre açı olduğundan $m(\overparen{BC}) = 2 \cdot 20^\circ = 40^\circ$ olur.

Buradan $m(\overparen{AB}) = m(\overparen{ABC}) - m(\overparen{BC}) = 160^\circ - 40^\circ = 120^\circ$ olur.

BAF açısı teğet-kiriş açı olduğundan

$m(\widehat{BAF}) = \dfrac{m(\overparen{AB})}{2} = \dfrac{120^\circ}{2} = 60^\circ$ bulunur.

Örnek 5



Yandaki şekilde AE doğrusu çembere A noktasında teğettir. $m(\widehat{EAD}) = 30^\circ$ ve $m(\overparen{DC}) = 50^\circ$ olduğuna göre ADC açısının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm

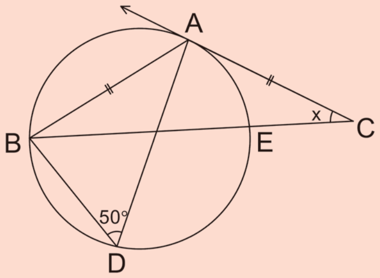
EAD açısı teğet-kiriş açı olduğundan $\dfrac{m(\overparen{AD})}{2} = m(\widehat{EAD}) = 30^\circ$ ve $m(\overparen{AD}) = 60^\circ$ olur.

Çemberin yay ölçüleri toplamı 360° olduğundan

$$m(\overparen{AD}) + m(\overparen{DC}) + m(\overparen{ABC}) = 360^\circ$$
$$60^\circ + 50^\circ + m(\overparen{ABC}) = 360^\circ$$
$$m(\overparen{ABC}) = 250^\circ \text{ olur.}$$

ADC açısı çevre açı olduğundan $m(\widehat{ADC}) = \dfrac{m(\overparen{ABC})}{2} = \dfrac{250^\circ}{2} = 125^\circ$ bulunur.

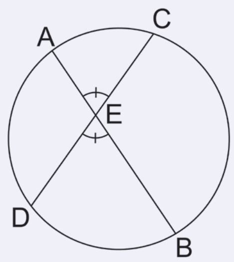
Sıra Sizde



Yandaki şekilde verilen çemberde $[CA$, A noktasında çembere teğettir. B, E, C noktaları doğrusal, $|AB| = |AC|$, $m(\widehat{BDA}) = 50^\circ$ ve $m(\widehat{ACB}) = x$ olduğuna göre x'in kaç derece olduğunu bulunuz.

Bilgi

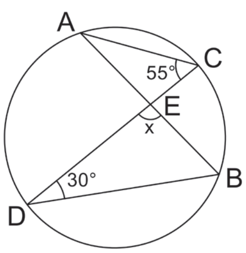
Bir çemberde kesişen iki kirişin oluşturduğu açıya **iç açı** denir. Bir iç açının ölçüsü çemberden ayırdığı yayların ölçüleri toplamının yarısına eşittir.



Yandaki şekilde verilen çemberde $[AB]$ ve $[CD]$, E noktasında kesişmektedir. DEB ve AEC açıları ters açı olduğundan ölçüleri eşittir. Bu açılar iç açı olduğundan $m(\widehat{DEB}) = m(\widehat{AEC}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{AC}) + m(\overset{\frown}{DB})}{2}$ olur.

Benzer şekilde CEB ve AED açıları ters açı olduğundan ölçüleri eşittir. Bu açılar iç açı olduğundan $m(\widehat{CEB}) = m(\widehat{AED}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{CB}) + m(\overset{\frown}{AD})}{2}$ olur.

Örnek 6



Yandaki şekilde verilen çemberde $[AB]$ ve $[CD]$, E noktasında kesişmektedir. $m(\widehat{ACD}) = 55^\circ$, $m(\widehat{BDC}) = 30^\circ$ ve $m(\widehat{DEB}) = x$ olduğuna göre x'in kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm

$\widehat{ACD}$ ve $\widehat{BDC}$ çevre açı olduğundan $m(\overset{\frown}{AD}) = 2 \cdot 55^\circ = 110^\circ$ ve $m(\overset{\frown}{BC}) = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$ olur. $\widehat{AED}$ iç açı olduğundan

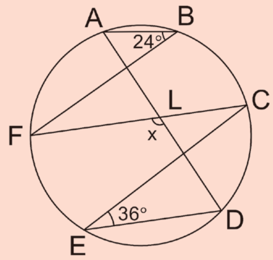
$$m(\widehat{AED}) = \frac{m(\overset{\frown}{AD}) + m(\overset{\frown}{BC})}{2} = \frac{110^\circ + 60^\circ}{2} = 85^\circ \text{ olur.}$$

A, E, B doğrusal olduğundan $m(\widehat{AED}) + m(\widehat{DEB}) = 180^\circ$

$$85^\circ + x = 180^\circ$$

$$x = 95^\circ \text{ bulunur.}$$

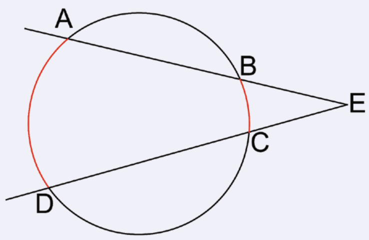
Sıra Sizde



Yandaki şekilde verilen çemberde A, L, D noktaları doğrusal, $m(\widehat{ABF}) = 24^\circ$, $m(\widehat{CED}) = 36^\circ$ ve $m(\widehat{FLD}) = x$ olduğuna göre x'in kaç derece olduğunu bulunuz.

Bilgi

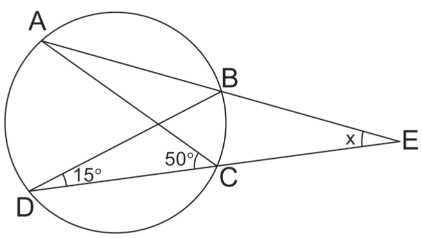
Köşesi çemberin dış bölgesinde olan, iki teğetin, iki kesenin veya bir teğet ile bir kesenin oluşturduğu açıya **dış açı** denir. Bir dış açının ölçüsü, çemberden ayırdığı yaylardan büyük olanın ölçüsünden küçük olanının ölçüsü çıkarılıp ikiye bölünmesiyle bulunur.



Yandaki şekilde verilen çemberde, $[EA$ ve $[ED$, E noktasında kesişmektedir. Bu durumda

AED açısı dış açı olur ve $m(\widehat{AED}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{AD}) - m(\overset{\frown}{BC})}{2}$ ile bulunur.

Örnek 7



Yandaki şekilde verilen çemberde $[EA]$ ve $[ED]$ E noktasında kesişmektedir. $m(\widehat{ACD}) = 50^\circ$, $m(\widehat{BDC}) = 15^\circ$ ve $m(\widehat{AED}) = x$ olduğuna göre x'in kaç derece olduğunu bulunuz.

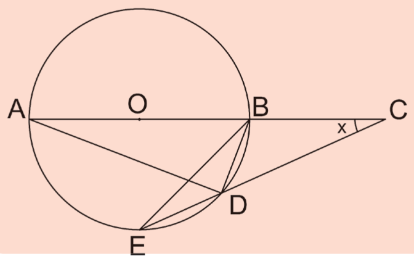
Çözüm

$\widehat{BDC}$ ve $\widehat{ACD}$ çevre açı olduğundan $m(\overset{\frown}{BC}) = 2 \cdot 15^\circ = 30^\circ$ ve $m(\overset{\frown}{AD}) = 2 \cdot 50^\circ = 100^\circ$ olur. $\widehat{AED}$ dış açı olduğundan $m(\widehat{AED}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{AD}) - m(\overset{\frown}{BC})}{2}$

$$x = \frac{100^\circ - 30^\circ}{2}$$

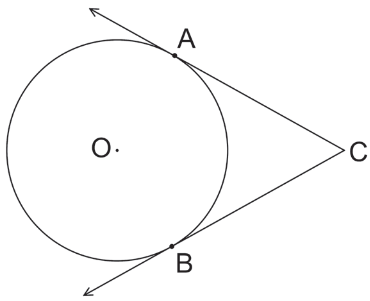
$$x = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde



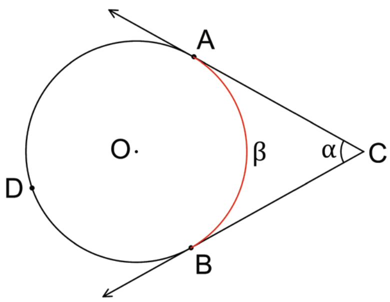
Yandaki şekilde verilen O merkezli çemberde A, O, B, C ve C, D, E noktaları doğrusal; $m(\overset{\frown}{ABE}) = 45^\circ$, $m(\overset{\frown}{EBD}) = 20^\circ$ ve $m(\overset{\frown}{ACE}) = x$ olduğuna göre x'in kaç derece olduğunu bulunuz.

Örnek 8



Yandaki şekilde $[CA$ ve $[CB$, O merkezli çembere sırasıyla A ve B noktalarında teğettir. $m(\overset{\frown}{AB}) + m(\overset{\frown}{ACB}) = 180^\circ$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm



$m(\overset{\frown}{ACB}) = \alpha$ ve $m(\overset{\frown}{AB}) = \beta$ olsun. Çemberin yay ölçüleri toplamı 360° olduğundan $\beta + m(\overset{\frown}{ADB}) = 360^\circ \Rightarrow m(\overset{\frown}{ADB}) = 360^\circ - \beta$ olur.
ACB açısı dış açı olduğundan

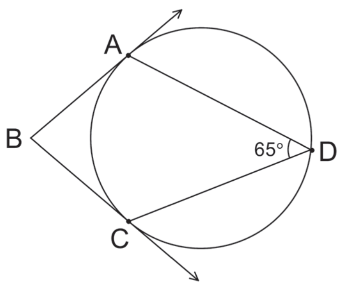
$$\frac{m(\overset{\frown}{ADB}) - m(\overset{\frown}{AB})}{2} = m(\overset{\frown}{ACB})$$

$$\frac{360^\circ - \beta - \beta}{2} = \alpha$$

$$360^\circ - 2\beta = 2\alpha$$

$$2\alpha + 2\beta = 360^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 180^\circ \text{ olur.}$$

Örnek 9

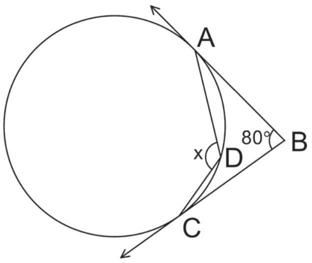


Yandaki şekilde $[BA$, A noktasında ve $[BC$, C noktasında çembere teğettir. $m(\overset{\frown}{ADC}) = 65^\circ$ olduğuna göre ABC açısının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm

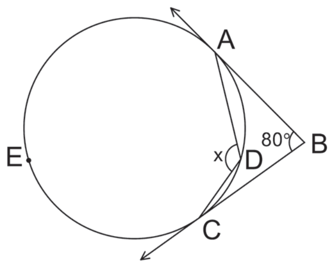
ADC açısı çevre açı olduğundan $m(\overset{\frown}{AC}) = 2 \cdot 65^\circ = 130^\circ$ olur.
$m(\overset{\frown}{AC}) + m(\overset{\frown}{ABC}) = 180^\circ$ olduğundan $130^\circ + x = 180^\circ \Rightarrow x = 50^\circ$ bulunur.

Örnek 10



Yandaki şekilde $[BA$ ve $[BC$ sırasıyla A ve C noktalarında çembere teğettir. $m(\widehat{ABC}) = 80^\circ$ ve $m(\widehat{ADC}) = x$ olduğuna göre x'in kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm



$m(\widehat{ABC}) + m(\overset{\frown}{ADC}) = 180^\circ$ olduğundan

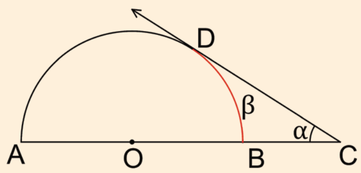
$80^\circ + m(\overset{\frown}{ADC}) = 180^\circ$ ve buradan $m(\overset{\frown}{ADC}) = 100^\circ$ olur. E noktası şekildeki gibi işaretlensin.

$m(\overset{\frown}{AEC}) + m(\overset{\frown}{ADC}) = 360^\circ$ olduğundan $m(\overset{\frown}{AEC}) + 100^\circ = 360^\circ$ ve

$m(\overset{\frown}{AEC}) = 260^\circ$ olur.

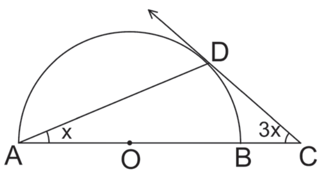
ADC açısı çevre açı olduğundan $m(\widehat{ADC}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{AEC})}{2} = \dfrac{260^\circ}{2} = 130^\circ$ bulunur.

İpucu



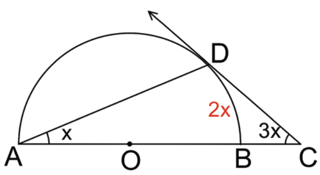
Yandaki şekilde $[CD$, O merkezli çembere D noktasında teğet ve A, O, B, C noktaları doğrusaldır. $m(\widehat{DCB}) = \alpha$ ve $m(\overset{\frown}{DB}) = \beta$ olmak üzere $\alpha + \beta = 90^\circ$ olur.

Örnek 11



Yandaki şekilde $[CD$, O merkezli çembere D noktasında teğet ve A, O, B, C noktaları doğrusaldır. $m(\widehat{DCB}) = 3x$ ve $m(\widehat{DAB}) = x$ olduğuna göre x'in kaç derece olduğunu bulunuz.

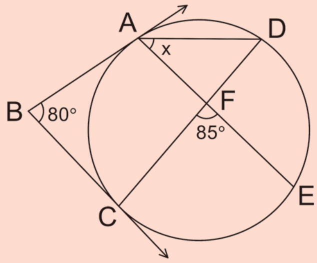
Çözüm



DAB açısı çevre açı olduğundan $m(\overset{\frown}{DB}) = 2 \cdot m(\widehat{DAB}) = 2x$ olur.

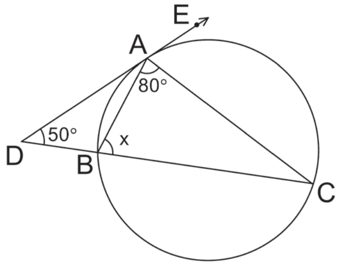
$$m(\overset{\frown}{DB}) + m(\widehat{DCB}) = 90^\circ \text{ olup } 2x + 3x = 90^\circ$$
$$5x = 90^\circ$$
$$x = 18^\circ \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde



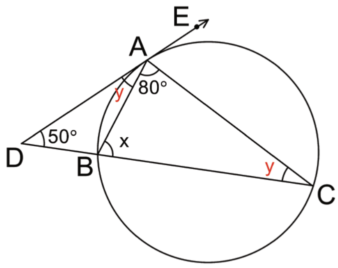
Yandaki şekilde verilen çemberde $[BA$, A noktasında ve $[BC$, C noktasında çembere teğettir. C, F, D ve A, F, E noktaları doğrusal; $m(\widehat{ABC}) = 80^\circ$, $m(\widehat{CFE}) = 85^\circ$ ve $m(\widehat{EAD}) = x$ olduğuna göre x'in kaç derece olduğunu bulunuz.

Örnek 12



Yandaki şekilde $[DE$, A noktasında çembere teğet ve D, B, C noktaları doğrusaldır. $m(\widehat{ADC}) = 50^\circ$, $m(\widehat{BAC}) = 80^\circ$ ve $m(\widehat{ABC}) = x$ olduğuna göre x'in kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm



$\widehat{ACB}$ çevre açı olduğundan $m(\widehat{ACB}) = y$ denirse $m(\overset{\frown}{AB}) = 2y$ olur.

$\widehat{DAB}$ teğet-kiriş açı olduğundan $m(\widehat{DAB}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{AB})}{2} = y$ olur. $\widehat{ADC}$'nin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° olduğundan

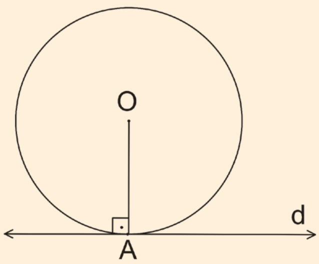
$$50^\circ + y + 80^\circ + y = 180^\circ$$
$$2y + 130^\circ = 180^\circ$$
$$2y = 50^\circ$$
$$y = 25^\circ \text{ olur.}$$

$\widehat{ABC}$'nin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° olduğundan

$x + 80^\circ + y = 180^\circ \Rightarrow x + 80^\circ + 25^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 75^\circ$ olur.

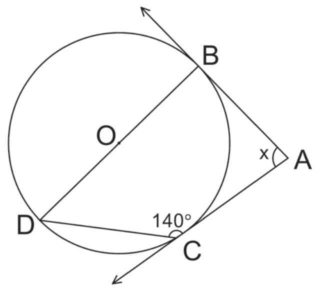
İpucu

Bir çemberde merkezden teğetin değme noktasına indirilen doğru parçası teğete diktir.



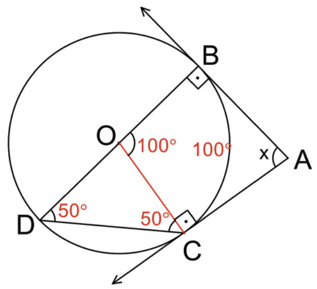
Yandaki şekilde verilen O merkezli çemberde d doğrusu çembere A noktasında teğet olduğundan $[OA] \perp d$ olur.

Örnek 13



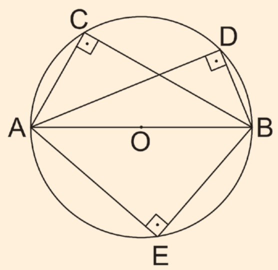
Yandaki şekilde $[AB$, B noktasında $[AC$, C noktasında O merkezli, $[BD]$ çaplı çembere teğettir. $m(\widehat{ACD}) = 140^\circ$ ve $m(\widehat{BAC}) = x$ olduğuna göre x'in kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm



Bir çemberde merkezden teğetin değme noktasına indirilen doğru parçası teğete dik olduğundan O ile C noktaları birleştirilirse $[OC] \perp [AC]$ olur. $m(\widehat{OCD}) = 140^\circ - 90^\circ = 50^\circ$, $|OD| = |OC|$ olduğundan $m(\widehat{BDC}) = 50^\circ$ olur. BDC açısı çevre açı olduğundan $m(\widehat{BC}) = 2 \cdot 50^\circ = 100^\circ$ bulunur. $m(\widehat{BC}) + m(\widehat{BAC}) = 180^\circ$ olup $100^\circ + x = 180^\circ \Rightarrow x = 80^\circ$ olarak bulunur.

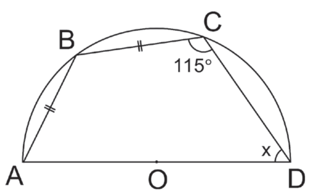
İpucu



Bir çemberde çapı gören çevre açı 90° dir.

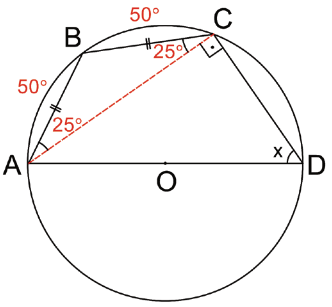
Yandaki O merkezli, $[AB]$ çaplı çemberde çapı gören ACB, ADB ve AEB açılarının her birinin ölçüsü 90° dir.

Örnek 14



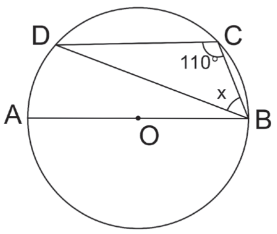
Yandaki şekilde verilen O merkezli, $[AD]$ çaplı yarım çemberde $|AB| = |BC|$, $m(\widehat{BCD}) = 115^\circ$ ve $m(\widehat{ADC}) = x$ olduğuna göre x'in kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm



Çember tamamlanıp $[AC]$ çizilirse $\overset{\frown}{ACD}$ çapı gören çevre açı olduğundan $m(\overset{\frown}{ACD}) = 90^\circ$ ve $m(\overset{\frown}{BCA}) = 115^\circ - 90^\circ = 25^\circ$ olur.
$|AB| = |BC|$ olduğundan $m(\overset{\frown}{BCA}) = m(\overset{\frown}{BAC}) = 25^\circ$ olur.
BAC ve BCA çevre açı olduğundan $m(\overset{\frown}{BC}) = m(\overset{\frown}{AB}) = 50^\circ$ olup $m(\overset{\frown}{AC}) = 50^\circ + 50^\circ = 100^\circ$ olur. CDA açısı çevre açı olduğundan
$m(\overset{\frown}{CDA}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{ABC})}{2} = \dfrac{100^\circ}{2} = 50^\circ$ olarak bulunur.

Örnek 15



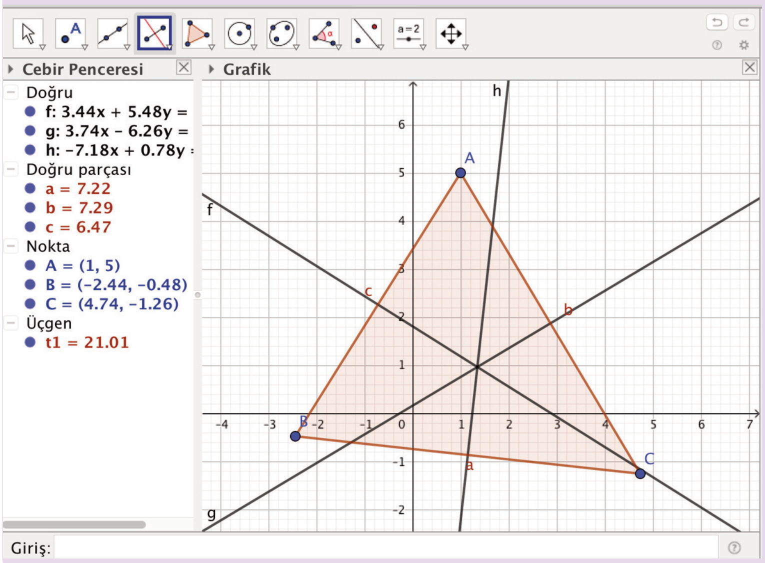
Yandaki şekilde verilen O merkezli, $[AB]$ çaplı çemberde $[DC] \,/\!/\, [AB]$, $m(\overset{\frown}{DCB}) = 110^\circ$ ve $m(\overset{\frown}{CBD}) = x$ olduğuna göre x'in kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm

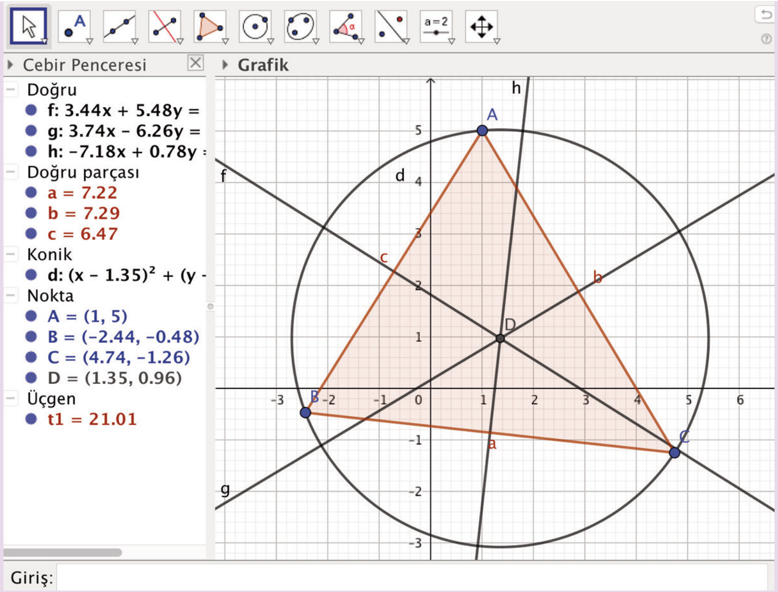
$\overset{\frown}{DCB}$ çevre açı olduğundan $m(\overset{\frown}{DAB}) = 2 \cdot 110^\circ = 220^\circ$ olur. $[AB]$ çap olduğundan $m(\overset{\frown}{AB}) = 180^\circ$ ve $m(\overset{\frown}{DA}) = 220^\circ - 180^\circ = 40^\circ$ olur. $\overset{\frown}{DBA}$ çevre açı olduğundan $m(\overset{\frown}{DBA}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{DA})}{2} = \dfrac{40^\circ}{2} = 20^\circ$ olur. $[DC] \,/\!/\, [AB]$ ve iç ters açılardan $m(\overset{\frown}{DBA}) = m(\overset{\frown}{CDB}) = 20^\circ$ olur. DCB üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplamından $20^\circ + 110^\circ + x = 180^\circ \Rightarrow x = 50^\circ$ bulunur.

Buluyorum

Çevrel Çember Çizimi

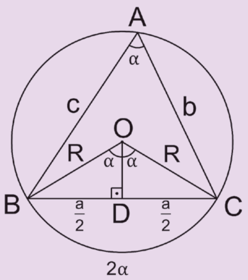


Dinamik matematik yazılımını açınız. Araç çubuğundaki 5. kutuya ve ardından açılan "Çokgen" sekmesine tıklayınız. Daha sonra grafik penceresinde dar açılı bir üçgen çiziniz (Yandaki şekilde ABC üçgeni çizilmiştir.).
Araç çubuğundaki 4. kutuya ve ardından açılan "Orta Dikme" sekmesine tıklayınız. Ardından çizilen üçgenin her bir kenarına ayrı ayrı tıklayarak üçgenin kenar orta dikmelerini çiziniz.



Araç çubuğundaki 6. kutuya ve ardından açılan “Merkez ve bir noktadan geçen çember” sekmesine tıklayınız. Daha sonra ilk olarak kenar orta dikmelerin kesiştiği noktaya ve ardından üçgenin herhangi bir köşesine tıklayınız (Yandaki şekilde üçgenin A köşesine tıklanmıştır.). Bu durumda çizilen çemberin üçgenin diğer köşelerinden de geçtiği görülür.
Sonuç olarak çizilen çember üçgenin çevrel çemberi olmuştur ve bu çevrel çemberin merkezi kenar orta dikmelerin kesiştiği noktadır.
Siz de dik açılı ve geniş açılı üçgenlerin çevrel çemberlerini çiziniz.

Buluyorum

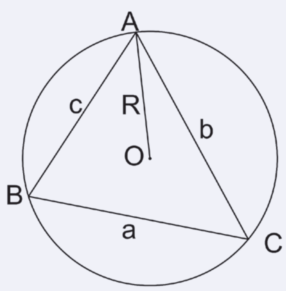


Yandaki şekilde verilen O merkezli, R yarıçaplı çemberde $m(\widehat{BAC}) = \alpha$ ve $|BC| = a$ birim olarak verilmiştir. O noktası çember üzerindeki B ve C noktaları ile birleştirilip BOC ikizkenar üçgeni elde edilir. $[BC]$'nın orta noktası D olarak işaretlenip O noktası ile birleştirilirse $|BD| = |DC| = \frac{a}{2}$ birim olur. BAC açısı çevre açı olduğundan gördüğü BC yayının ölçüsü 2α'dır. BOC merkez açı olduğundan $m(\widehat{BOC}) = 2\alpha$ ve $[OD]$ BOC açısının açıortayı olduğundan $m(\widehat{BOD}) = m(\widehat{DOC}) = \alpha$ olur. BOD dik üçgeninde $\sin\alpha = \frac{|BD|}{|BO|} = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R}$ olur.

Buradan $a = 2R \cdot \sin\alpha$ olup $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$ olarak bulunur.

Benzer şekilde $\frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R$ eşitlikleri elde edilebilir.

Bilgi

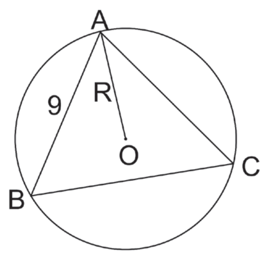


Şekildeki ABC üçgeninin O merkezli, R yarıçaplı çevrel çemberi verilmiştir. Üçgenin kenarları ve açıları arasında $\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R$ bağıntısı vardır.

Örnek 16

Dar açılı bir ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçap uzunluğu $3\sqrt{3}$ cm ve $|AB| = 9$ cm olduğuna göre $m(\widehat{C})$'nün kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm



Verilenler yandaki şekildeki gibi çizilir.

$$\frac{|AB|}{\sin\widehat{C}} = 2R \Rightarrow \frac{9}{\sin\widehat{C}} = 2 \cdot 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sin\widehat{C} = \frac{9}{6\sqrt{3}}$$

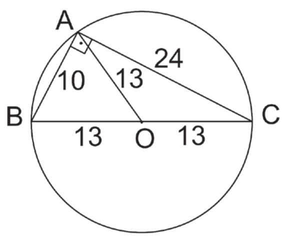
$$\Rightarrow \sin\widehat{C} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow m(\widehat{C}) = 60^\circ \text{ bulunur.}$$

Örnek 17

ABC dik üçgeninde $[AB] \perp [AC]$, $|AB| = 10$ cm ve $|AC| = 24$ cm olduğuna göre ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçap uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

Çözüm



Verilenler yandaki şekildeki gibi çizilir. Pisagor teoremi ile

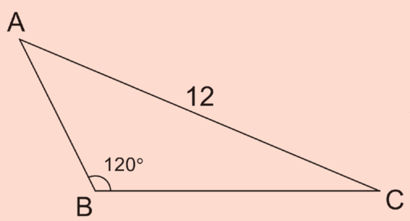
$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$$

$$|BC|^2 = 10^2 + 24^2$$

$$|BC|^2 = 676 \Rightarrow |BC| = 26 \text{ cm olur.}$$

Sinüs teoremiyle $\dfrac{|BC|}{\sin\widehat{A}} = 2R \Rightarrow \dfrac{26}{\underbrace{\sin 90^\circ}_{1}} = 2R \Rightarrow 2R = 26 \Rightarrow R = 13$ cm olur.

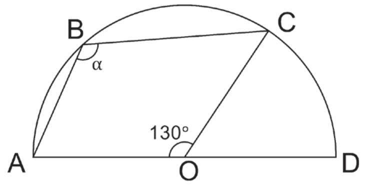
Sıra Sizde



Yandaki şekilde verilen ABC üçgeninde $m(\widehat{ABC}) = 120^\circ$ ve $|AC| = 12$ cm olduğuna göre ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçap uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

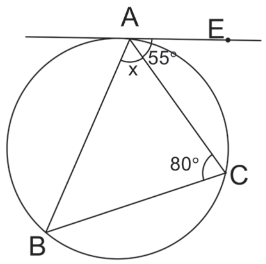
ALIŞTIRMALAR

1.



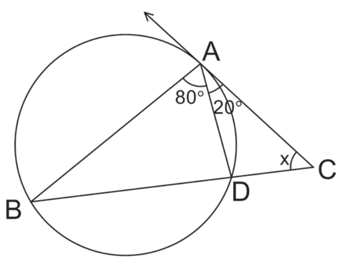
Yukarıdaki şekilde verilen O merkezli, $[AD]$ çaplı yarım çemberde $m(\widehat{AOC}) = 130^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{ABC}) = \alpha$'nın kaç derece olduğunu bulunuz.

2.



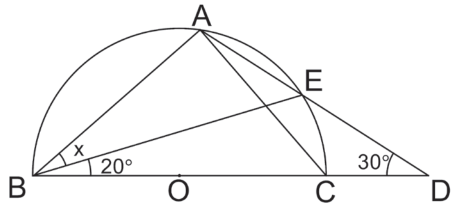
Yukarıdaki şekilde AE doğrusu, çembere A noktasında teğettir. $m(\widehat{EAC}) = 55^\circ$ ve $m(\widehat{ACB}) = 80^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{BAC}) = x$'in kaç derece olduğunu bulunuz.

3.



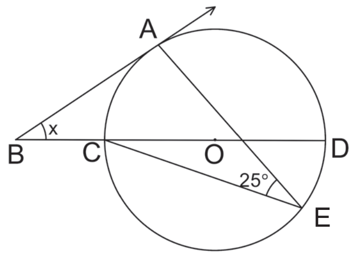
Yukarıdaki şekilde B, D, C noktaları doğrusal ve $[CA$, A noktasında çembere teğettir. $m(\widehat{DAC}) = 20^\circ$ ve $m(\widehat{BAD}) = 80^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{ACB}) = x$'in kaç derece olduğunu bulunuz.

4.



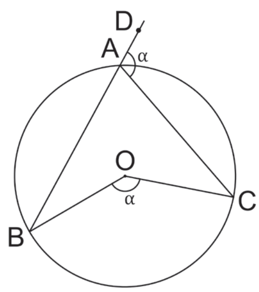
Yukarıdaki şekilde verilen O merkezli, $[BC]$ çaplı yarım çemberde B, C, D ve A, E, D noktaları doğrusaldır. $m(\widehat{EBD}) = 20^\circ$ ve $m(\widehat{ADB}) = 30^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{ABE}) = x$'in kaç derece olduğunu bulunuz.

5.



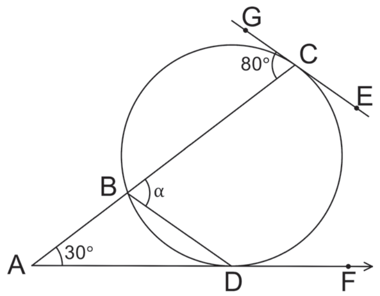
Yukarıdaki şekilde B, C, O, D noktaları doğrusal ve $[BA$, A noktasında O merkezli çembere teğettir. $m(\widehat{AEC}) = 25^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{ABD}) = x$'in kaç derece olduğunu bulunuz.

6.



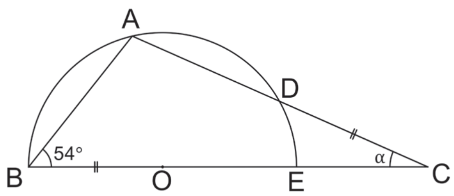
Yukarıdaki şekilde verilen O merkezli çemberde B, A, D noktaları doğrusaldır. $m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{DAC}) = \alpha$ olduğuna göre α açısının kaç derece olduğunu bulunuz.

7.



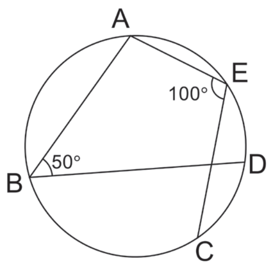
Yukarıdaki şekilde [AF , D noktasında ve GE doğrusu, C noktasında çembere teğettir. [CA] çemberi B noktasında kesmektedir. $m(\widehat{GCA}) = 80^\circ$ ve $m(\widehat{CAD}) = 30^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{CBD}) = \alpha$ 'nın kaç derece olduğunu bulunuz.

8.



Yukarıdaki şekilde verilen O merkezli, [BE] çaplı yarım çemberde B, E, C ve A, D, C noktaları doğrusaldır. $|BO| = |DC|$, $m(\widehat{ABC}) = 54^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{ACB}) = \alpha$ 'nın kaç derece olduğunu bulunuz.

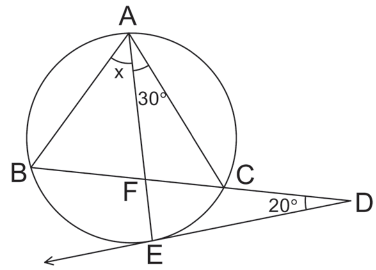
9.



A, B, C, D, E çember üzerindeki noktalardır. $m(\widehat{ABD}) = 50^\circ$ ve $m(\widehat{AEC}) = 100^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{CD})$ 'nün kaç derece olduğunu bulunuz.

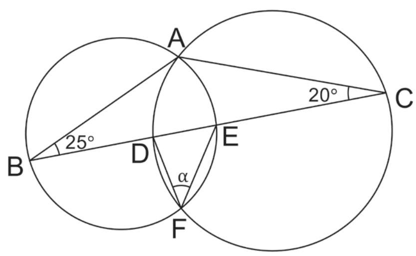
10. Bir ABC üçgeninde $m(\widehat{ABC}) = 10^\circ$ ve $m(\widehat{ACB}) = 20^\circ$ olarak verilmiştir. ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçap uzunluğu 8 cm olduğuna göre [BC] 'nın uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

11.



Yukarıdaki şekilde [DE , E noktasında çembere teğet ve B, F, C, D noktaları doğrusaldır. $m(\widehat{BDE}) = 20^\circ$ ve $m(\widehat{EAC}) = 30^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{BAE}) = x$ 'in kaç derece olduğunu bulunuz.

12.



Yukarıdaki şekilde verilen çemberler A ve F noktalarında kesişmektedir. ABC üçgeninde B, D, E ve C noktaları doğrusal, $m(\widehat{ABC}) = 25^\circ$ ve $m(\widehat{ACB}) = 20^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{DFE}) = \alpha$ 'nın kaç derece olduğunu bulunuz.

11.5.3. Çemberde Teğet

Terimler ve Kavramlar

- Teğet
- Teğet Parçası

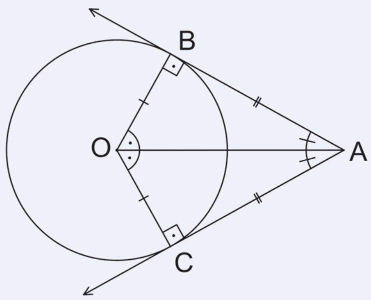
Neler Öğreneceksiniz?

- Çemberde teğetin özelliklerini göstererek işlemler yapmayı öğreneceksiniz.

11.5.3.1 Çemberde Teğetin Özellikleri

Bilgi

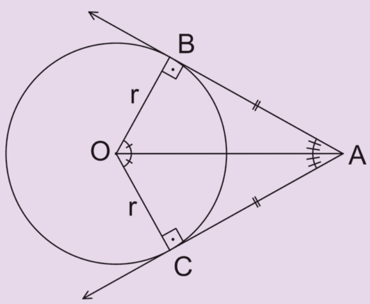
Bir çembere çemberin dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçalarının uzunlukları eşittir.



Şekildeki O merkezli çemberde $[AB$, A noktasında ve $[AC$, C noktasında çembere teğet ise

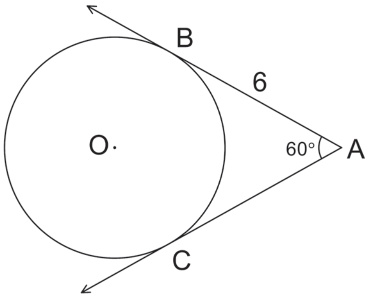
- $|AB| = |AC|$
- $m(\widehat{BAO}) = m(\widehat{CAO})$ olur.
- $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{AOC})$ olur.

Buluyorum



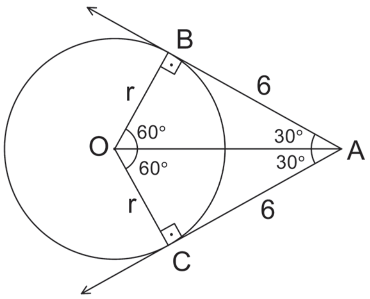
Yandaki şekilde $|OB| = |OC| = r$ ve $[OB] \perp [AB]$, $[OC] \perp [AC]$ olup Pisagor teoremiyle $|AB|^2 + r^2 = |AC|^2 + r^2 = |AO|^2$ olur. Buradan $|AB| = |AC|$ bulunur. AOB ve AOC üçgenlerinin kenar uzunlukları eşit olduğundan K.K.K. (Kenar- Kenar- Kenar) eşlik teoremiyle $\widehat{AOB} \cong \widehat{AOC}$ olur. Eş üçgenlerin açılarının ölçüleri de eş olacağından $m(\widehat{BAO}) = m(\widehat{CAO})$ ve $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{AOC})$ elde edilir.

Örnek 1



Yandaki şekilde verilen O merkezli çembere $[AB$, B noktasında ve $[AC$, C noktasında teğettir. $|AB| = 6$ cm ve $m(\widehat{BAC}) = 60^\circ$ olduğuna göre çemberin yarıçap uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

Çözüm

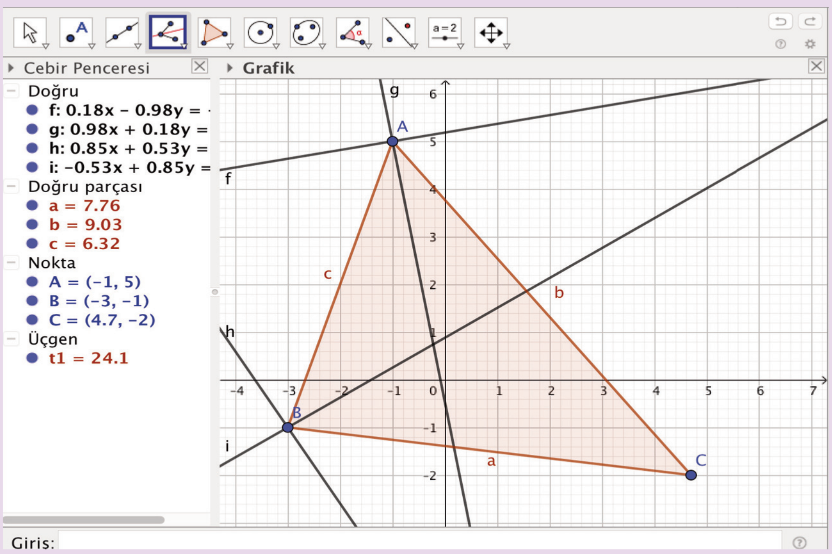


$[AO]$, $[OB]$ ve $[OC]$ çizilsin. Merkezden teğetin değme noktasına indirilen doğru parçası teğete dik olduğundan $m(\widehat{OBA}) = m(\widehat{OCA}) = 90^\circ$ olur. $[AO]$, BAC ve BOC açılarının açıortayı olduğundan $m(\widehat{BAO}) = m(\widehat{CAO}) = 30^\circ$ ve $m(\widehat{BOA}) = m(\widehat{COA}) = 60^\circ$ olarak bulunur. $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ dik üçgeninde ölçüsü 60° olan açının karşısındaki kenar $|AB| = 6$ cm ise ölçüsü 30° olan açının karşısındaki kenar $|OB| = r = \dfrac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ cm olarak bulunur.

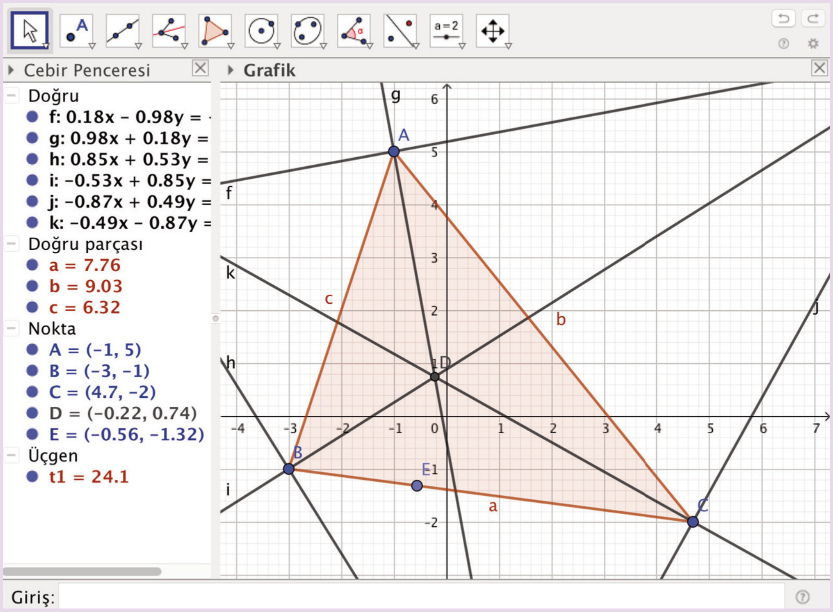
Buluyorum

İç Teğet Çember Çizimi

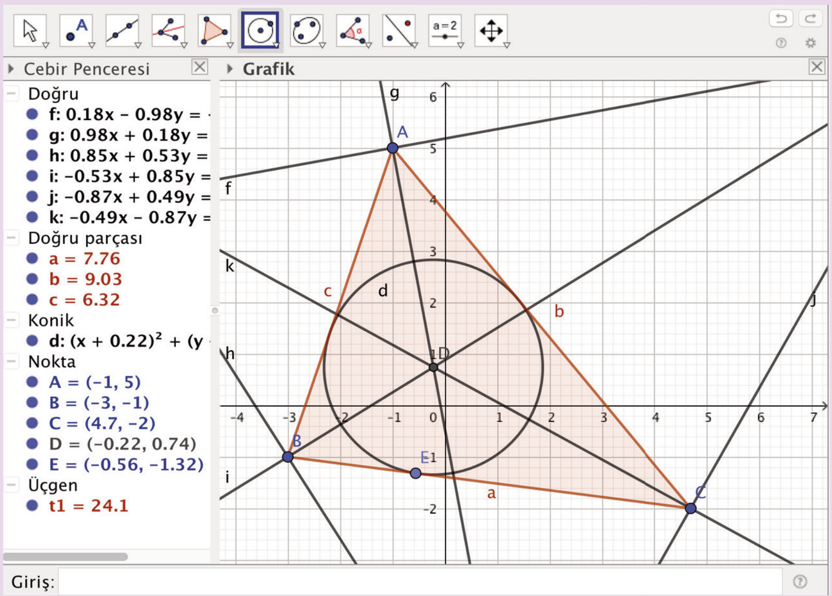
Bir üçgenin iç teğet çemberi dinamik matematik yazılımı kullanılarak aşağıdaki gibi çizilebilir.



Dinamik matematik yazılımını açınız. Araç çubuğundaki 5. kutuya ve ardından açılan "Çokgen" sekmesine tıklayınız. Daha sonra grafik penceresinde bir üçgen çiziniz (Yandaki şekilde ABC üçgeni çizilmiştir.).
Araç çubuğundaki 4. kutuya ve ardından açılan "Açıortay" sekmesine tıklayınız. Daha sonra çizilen üçgenin $[AB]$ ve $[AC]$ kenarlarına daha sonra da $[AB]$ ve $[BC]$ kenarlarına tıklayarak açıortay doğrularını çiziniz.



Daha sonra [AC] ve [BC] kenarlarına tıklanırsa C köşesinden geçen açıortay doğrusunun çizilen diğer iki açıortay doğruları ile bir noktada kesiştiği yandaki şekildeki gibi görülür.

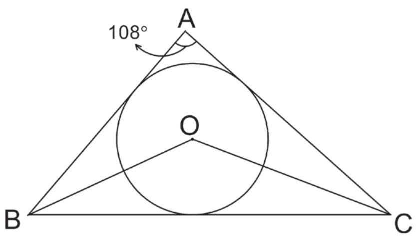


Araç çubuğundaki 6. sekmeye ve ardından açılan “Merkez ve bir noktadan geçen çember” sekmesine tıklayınız. Fareyi açıortayların kesim noktasına getirip fareyi hareket ettirerek üçgenin kenarlarına teğet olan çemberi çiziniz.

Sonuç olarak

- Üçgenin iç açıortayları üçgenin iç bölgesinde ve bir noktada kesişir.
- Bir üçgenin iç açıortaylarının kesim noktası üçgenin iç teğet çemberinin merkezidir.

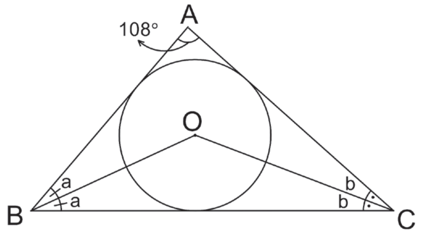
Örnek 2



Yandaki şekilde verilen O merkezli çember ABC üçgeninin kenarlarına içten teğettir. $m(\widehat{BAC}) = 108^\circ$ olduğuna göre BOC açısının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm

O merkezli çember ABC üçgeninin iç teğet çemberi olduğundan $[BO]$ ve $[CO]$ açıortaydır.



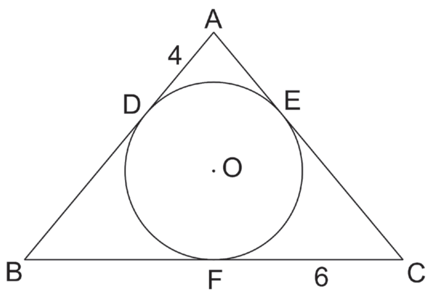
$m(\widehat{ABO}) = m(\widehat{OBC}) = a$ ve $m(\widehat{ACO}) = m(\widehat{OCB}) = b$ denirse ABC üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° olduğundan

$$2a + 2b + 108^\circ = 180^\circ$$
$$2a + 2b = 72^\circ$$
$$a + b = 36^\circ \text{ olur.}$$

BOC üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplam 180° olduğundan

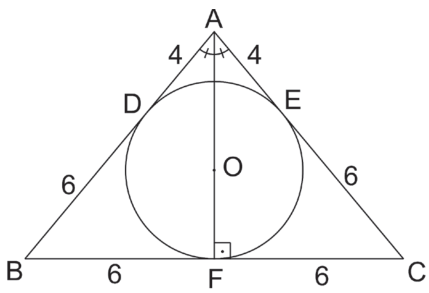
$$a + b + m(\widehat{BOC}) = 180^\circ$$
$$36^\circ + m(\widehat{BOC}) = 180^\circ$$
$$m(\widehat{BOC}) = 144^\circ \text{ bulunur.}$$

Örnek 3



Yandaki şekilde verilen ABC üçgeni O merkezli çembere D, E, F noktalarında teğettir. A, O, F noktaları doğrusal, $|AD| = 4$ cm ve $|FC| = 6$ cm olduğuna göre ABC üçgeninin çevre uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

Çözüm



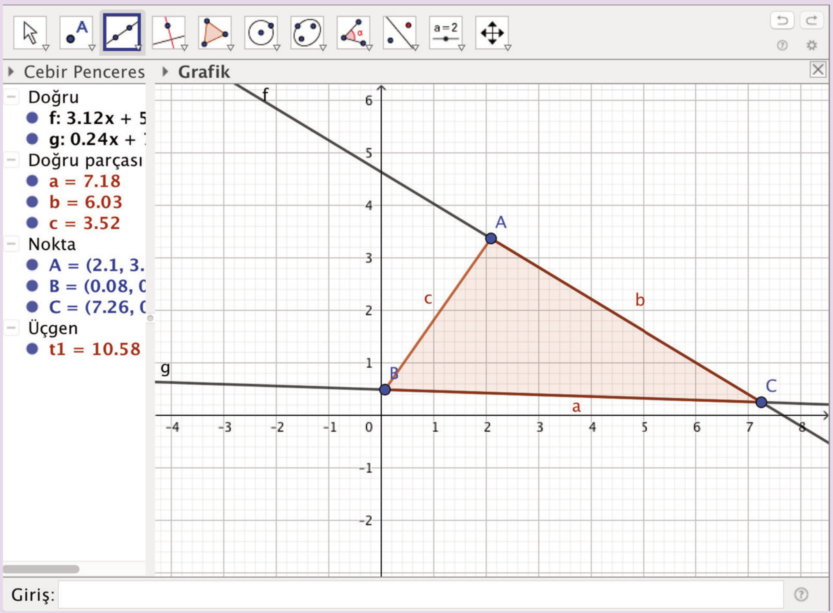
A, O, F noktaları doğrusal olduğundan $[AF]$ çizilirse $[AF]$ açıortay olur. Ayrıca $[AF]$, merkezle $[BC]$'nı birleştirdiğinden $[AF] \perp [BC]$ olur. $[AF]$ hem açıortay hem de yükseklik olduğundan ABC ikizkenar üçgen ve $|AB| = |AC|$ olur. İkizkenar üçgende tepe açısından çizilen yükseklik tabanı iki eş parçaya ayıracağından $|BF| = |FC| = 6$ cm olur. Çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçalarının uzunlukları eşit olduğundan $|CE| = |CF| = 6$ cm, $|BF| = |BD| = 6$ cm ve $|AE| = |AD| = 4$ cm olur. Buradan ABC üçgeninin çevresinin uzunluğu
$|AB| + |AC| + |BC| = 10 + 10 + 12 = 32$ cm bulunur.

Buluyorum

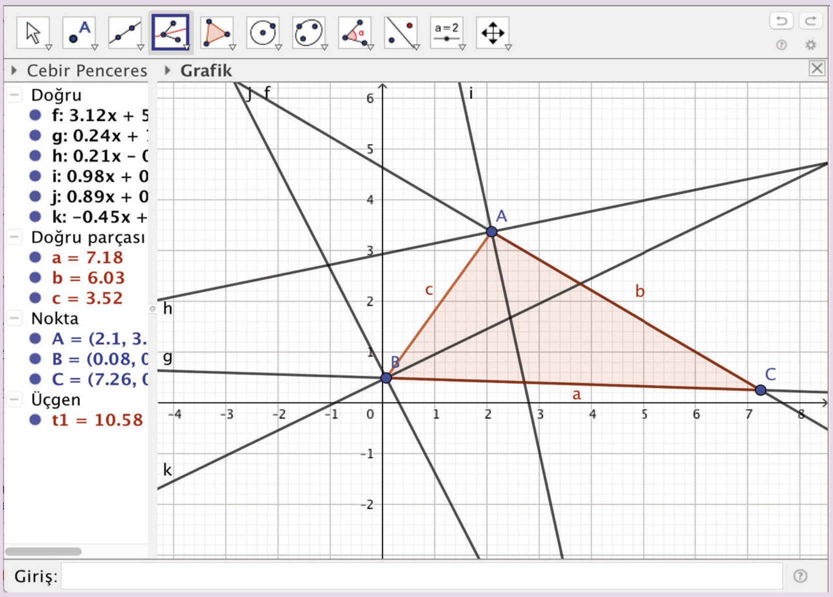
Dış Teğet Çember Çizimi

Bir üçgenin dış teğet çemberlerinden biri dinamik matematik yazılımı kullanılarak aşağıdaki gibi çizilebilir.

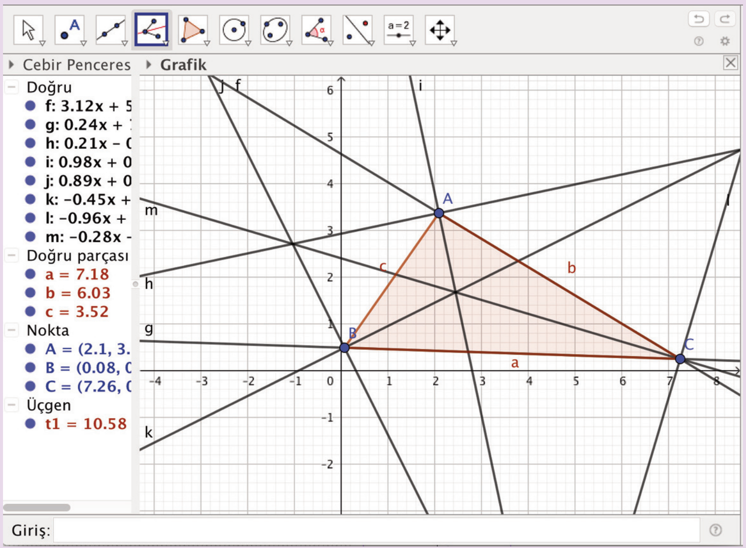
Dinamik matematik yazılımını açınız. Araç çubuğundaki 5. kutuya ve ardından açılan "Çokgen" sekmesine tıklayınız. Daha sonra grafik penceresinde bir üçgen çiziniz (Aşağıdaki şekilde ABC üçgeni çizilmiştir.). Araç çubuğundaki 3. kutuya ve ardından açılan "Doğru" sekmesine tıklayınız. Daha sonra çizilen üçgenin A ve C köşelerine sonra da B ve C köşelerine tıklayarak üçgenin [AC] ve [BC] kenarlarını aşağıdaki gibi uzatınız.



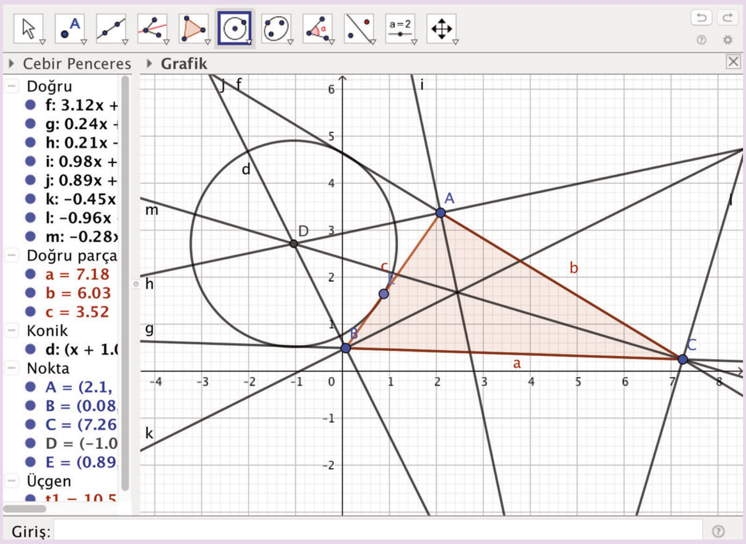
Araç çubuğundaki 4. kutuya ve ardından açılan "Açıortay" sekmesine tıklayınız. Daha sonra çizilen üçgenin [AB] ve [AC] kenarlarına sonra da [AB] ve [BC] kenarlarına tıklayarak açıortay doğrularını çiziniz.



Daha sonra [AC] ve [BC] kenarlarına tıklanırsa C köşesinden geçen açıortay doğrusunun çizilen diğer iki dış açıortay doğruları ile bir noktada kesiştiği aşağıda verilen şekildeki gibi görülür.



Araç çubuğundaki 6. sekmeye ve ardından açılan “Merkez ve bir noktadan geçen çember” sekmesine tıklayınız. Fareyi açıortayların kesim noktasına getirip fareyi hareket ettirerek üçgenin [AB] kenarına teğet olan çemberi çiziniz.



Sonuç olarak

- Üçgenin iki köşesine ait dış açıortayları ile bu köşelere ait olmayan bir iç açıortayı üçgenin dış bölgesinde ve bir noktada kesişir. Bu kesim noktası üçgenin dış teğet çemberlerinden birinin merkezidir.
- Bir üçgenin üç tane dış teğet çemberi vardır.

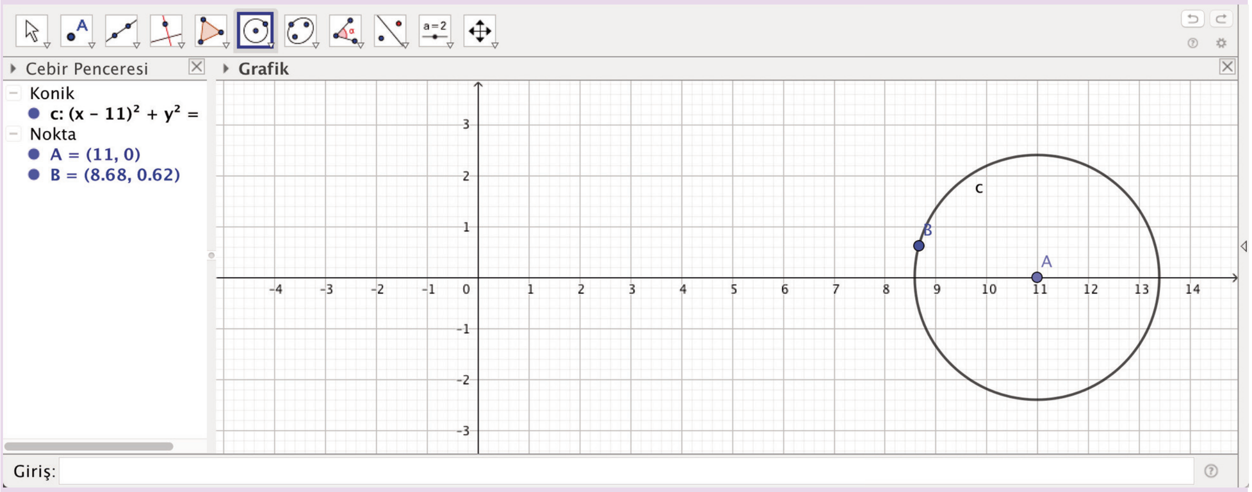
Sıra Sizde

Bir ABC üçgeninin [AC] ve [BC] tarafındaki dış teğet çemberlerini dinamik matematik yazılımı kullanarak çiziniz.

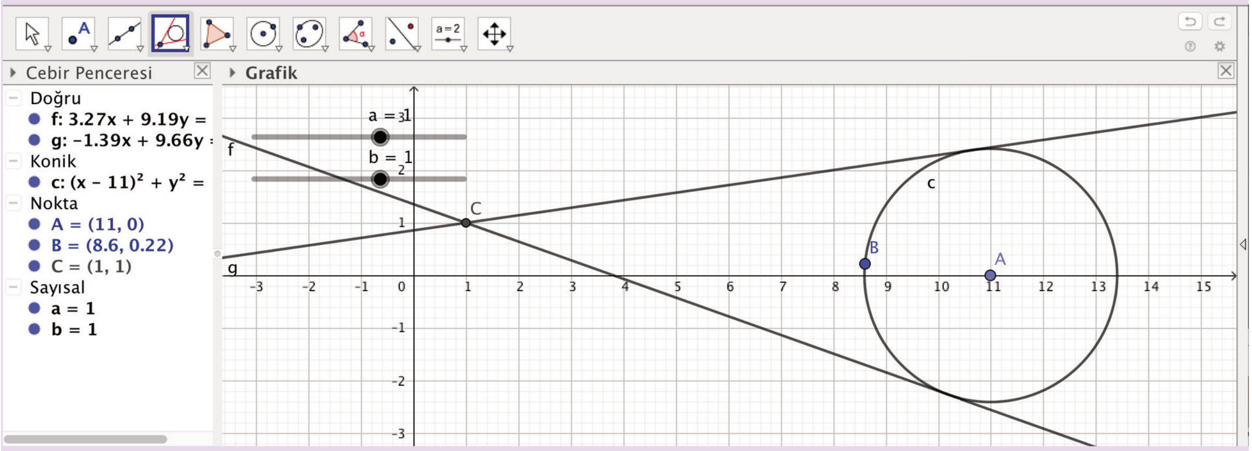
Buluyorum

Bir çember ve bu çembere dışındaki bir noktadan iki teğet çizilerek dışarıda alınan noktanın sürüklenmesiyle ortaya çıkan durum dinamik matematik yazılımı kullanarak aşağıdaki gibi incelenir.

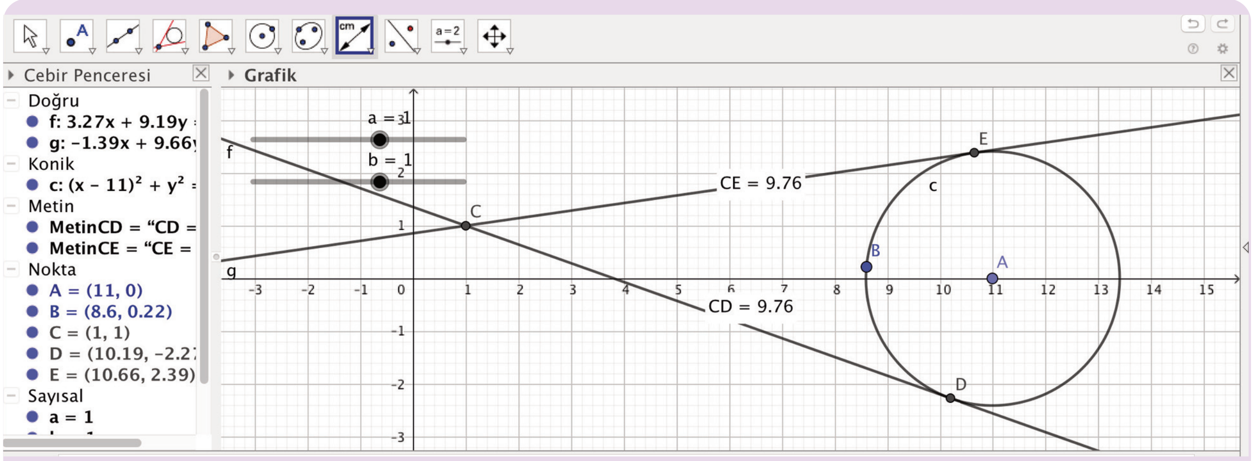
Dinamik matematik yazılımını açınız. Araç çubuğundaki 6. kutuya ve ardından açılan "Merkez ve bir noktadan geçen çember" sekmesine tıklayınız. Daha sonra grafik penceresine tıklayarak bir çember çiziniz (Aşağıdaki şekilde A merkezli bir çember çizilmiştir.).



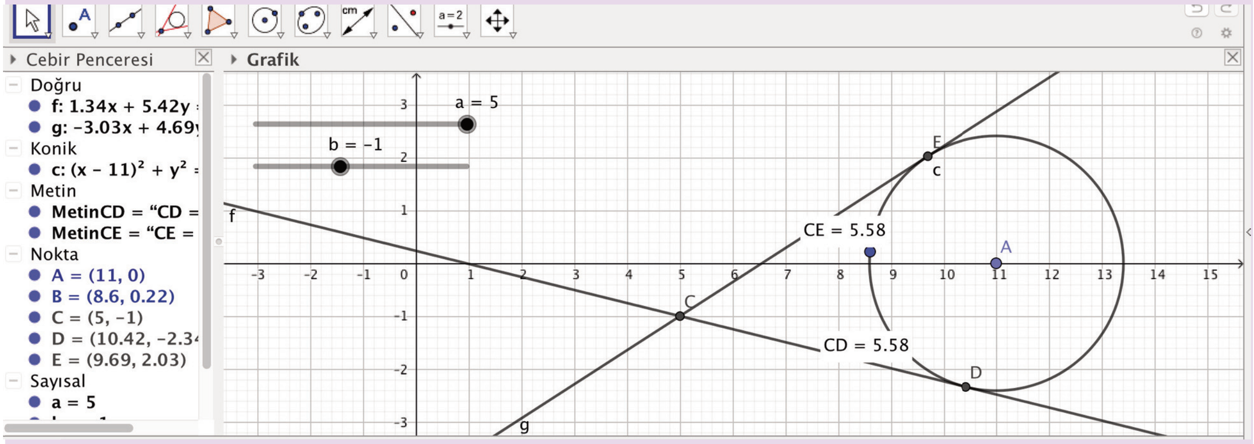
Giriş kısmına "(a,b)" yazıp "ENTER" tuşuna ve ardından ekrana gelen "Sürgüler Oluşturulsun mu?" butonuna basınız. Daha sonra araç çubuğundaki 4. kutuya ve ardından açılan "Teğet" sekmesine tıklayınız. Ekrandaki C noktasına ve ardından çember üzerindeki herhangi bir noktaya tıklanırsa aşağıda verilen şekildeki gibi C noktasından geçen ve C noktasında çembere teğet olan iki doğru çizilmiş olur.



Araç çubuğundaki 2. kutuya ve ardından açılan "Nokta" sekmesine tıklayıp ekrandaki doğruların çembere teğet oldukları noktalara tıklayınız (Aşağıdaki şekilde D ve E noktaları belirecektir.). Daha sonra araç çubuğundaki 8. kutuya ve ardından açılan "Uzaklık veya uzunluk" sekmesine tıklayınız. Ardından grafik penceresindeki C ve D daha sonra C ve E noktalarına tıklanırsa ekranda CD ve CE doğru parçalarının eş olan uzunlukları belirir.



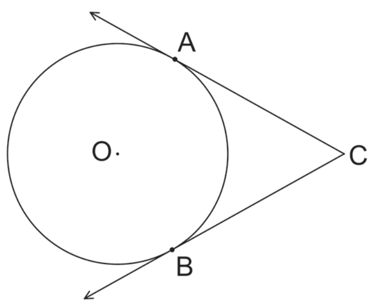
Ekrandaki a ve b sürgüleri sağa veya sola hareket ettirilirse C noktasının sürüklendiği fakat her durumda CD ve CE doğru parçalarının uzunluklarının değişmediği görülür. Örneğin a sürgüsü 5'e, b sürgüsü −1'e getirildiğinde grafik penceresinde aşağıdaki gibi bir görüntü elde edilir.



Aynı durum, fareyi C noktasının üzerine getirip tıkladıktan sonra bu nokta sürüklendiğinde de CD ve CE doğru parçalarının uzunluklarının değişmediği gözlemlenir.

Sonuç olarak bir çembere dışındaki herhangi bir noktadan teğetler çizildiğinde bu nokta teğetlerin değme noktalarına eşit uzaklıkta olur.

Örnek 4

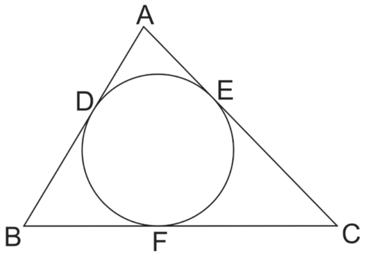


Yandaki şekilde O merkezli çembere dışındaki C noktasından teğetler çizilmiştir. Teğetlerin değme noktaları A ve B'dir. $|AC| = (2x + 12)$ cm ve $|BC| = (4x - 5)$ cm olduğuna göre $|AC|$'nun kaç cm olduğunu bulunuz.

Çözüm

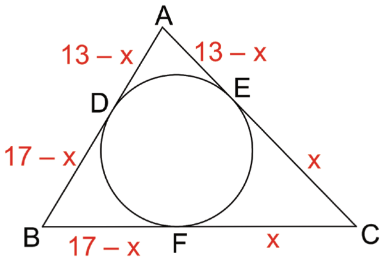
Bir çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet uzunlukları eşit olduğundan $|AC| = |BC|$ olur. Buradan $2x + 12 = 4x - 5 \Rightarrow 2x = 17 \Rightarrow x = \dfrac{17}{2}$ olur. $|AC| = 2x + 12 = 2 \cdot \dfrac{17}{2} + 12 = 29$ cm olarak bulunur.

Örnek 5



Yandaki şekilde ABC üçgeninin iç teğet çemberi üçgene D, E, F noktalarında teğettir. $|AB| = 10$ cm, $|AC| = 13$ cm ve $|BC| = 17$ cm olduğuna göre $|FC|$'nun kaç cm olduğunu bulunuz.

Çözüm

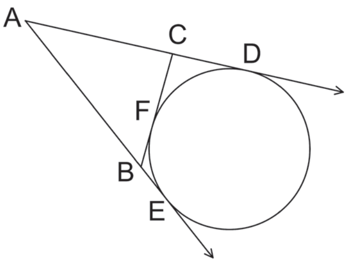


Bir çemberin dışındaki bir noktadan çembere çizilen teğet parçalarının uzunlukları eşittir. $|FC| = |EC| = x$ olsun. Buradan $|BF| = |BD| = 17 - x$ ve $|AE| = |AD| = 13 - x$ olur.

$$|AB| = |AD| + |DB| = 13 - x + 17 - x = 10$$
$$30 - 2x = 10$$
$$2x = 20$$
$$x = 10 \text{ olur.}$$

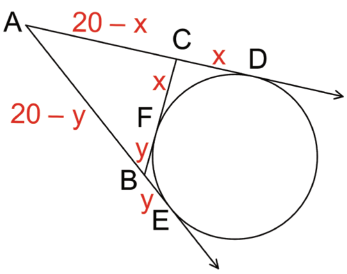
Buradan $|FC| = x = 10$ cm bulunur.

Örnek 6



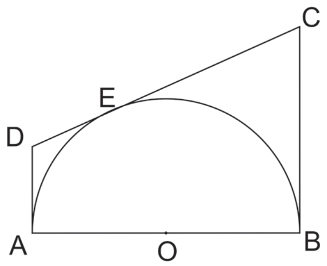
Dış teğet çemberlerinden biri yandaki gibi olan ABC üçgeninde $|AD| = 20$ cm olduğuna göre ABC üçgeninin çevresinin uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

Çözüm



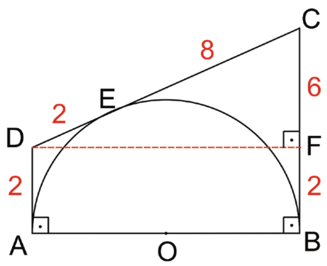
Bir çemberin dışındaki bir noktadan çembere çizilen teğet parçalarının uzunlukları eşit olduğundan $|AD| = |AE| = 20$ cm olur.
Ayrıca $|CD| = |CF| = x$ cm ve $|BF| = |BE| = y$ cm denirse
$|AC| = 20 - x$ cm ve $|AB| = 20 - y$ cm olur.
Buradan ABC üçgeninin kenar uzunlukları toplanırsa üçgenin çevresinin uzunluğu $Ç(\widehat{ABC}) = 20 - x + 20 - y + x + y = 40 - x - y + x + y = 40$ cm olarak bulunur.

Örnek 7



Yandaki şekilde verilen O merkezli, $[AB]$ çaplı yarım çemberde $[CB]$, B noktasında, $[CD]$, E noktasında ve $[DA]$, A noktasında çembere teğettir. $|AD| = 2$ cm ve $|CB| = 8$ cm olduğuna göre çemberin yarıçap uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

Çözüm

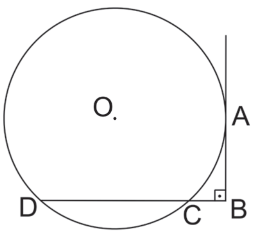


$[CE]$ ve $[CB]$ çembere teğet olduğundan $|CB| = |CE| = 8$ cm,
$[DA]$ ve $[DE]$ çembere teğet olduğundan $|DA| = |DE| = 2$ cm olur.
Merkezden teğete indirilen doğru parçası teğete dik olduğundan $[DA] \perp [AB]$ ve $[CB] \perp [AB]$ olur. $[AB] \mathbin{/\!/} [DF]$ olacak şekilde $[DF]$ çizilirse ABFD dikdörtgeni elde edilir. Buradan $|DA| = |BF| = 2$ cm ve $|CF| = 6$ cm olur.
DCF dik üçgeninde Pisagor teoremi ile

$$|DF|^2 + |CF|^2 = |DC|^2$$
$$|DF|^2 + 6^2 = 10^2$$
$$|DF|^2 + 36 = 100$$
$$|DF|^2 = 64$$
$$|DF| = 8 \text{ cm olur.}$$

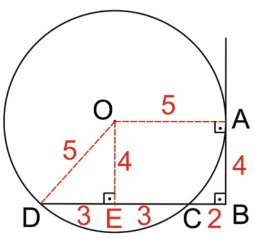
$|DF| = |AB| = 2r = 8$ cm olacağından çemberin yarıçap uzunluğu $r = 4$ cm olarak bulunur.

Örnek 8



Yandaki şekilde verilen O merkezli çemberde $[BA$, A noktasında çembere teğettir. $[AB] \perp [BD]$, $|BC| = 2$ cm ve $|DC| = 6$ cm olduğuna göre $|AB|$'nun kaç cm olduğunu bulunuz.

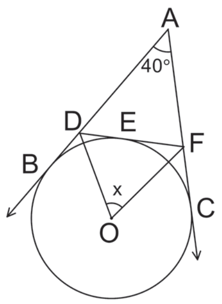
Çözüm



$[DC]$ nın orta noktası E olsun. Bu durumda $[OE] \perp [DC]$ ve $|DE| = |EC| = 3$ cm olur. Merkezden teğete indirilen doğru parçası teğete dik olduğundan $[OA] \perp [AB]$ olur. $|EB| = |EC| + |CB| = 3 + 2 = 5$ cm olur. OABE dikdörtgen olduğundan $|OA| = r = 5$ cm olur.
$[OD]$ yarıçapı çizilirse $|OD| = r = 5$ cm olur.
OED dik üçgeninde Pisagor teoremi ile $|OE| = |AB| = 4$ cm olarak bulunur.

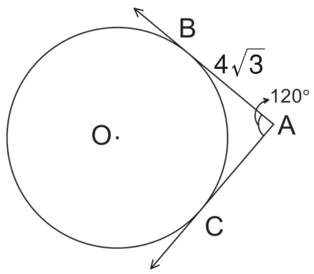
ALIŞTIRMALAR

1.



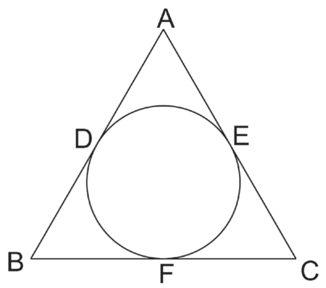
Yukarıdaki şekilde verilen ADF üçgeninin dış teğet çemberi çizilmiştir. $m(\widehat{BAC}) = 40^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{DOF}) = x$'in kaç derece olduğunu bulunuz.

2.



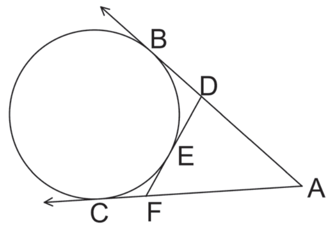
Yukarıdaki şekilde [AB, B noktasında; [AC, C noktasında O merkezli çembere teğettir. $|AB| = 4\sqrt{3}$ cm ve $m(\widehat{BAC}) = 120^\circ$ olduğuna göre A noktasının çembere uzaklığının **en az** kaç cm olduğunu bulunuz.

3.



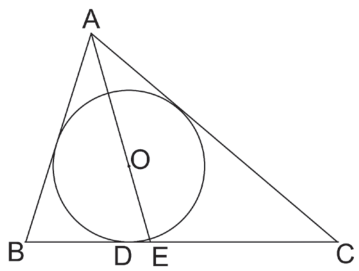
Yukarıdaki şekilde ABC eşkenar üçgeninin iç teğet çemberi çizilmiştir. ABC üçgeninin çevresinin uzunluğu 36 cm olduğuna göre çemberin yarıçap uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

4.



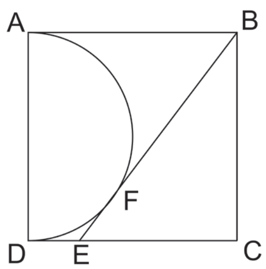
Yukarıdaki şekilde verilen ADF üçgeninin dış teğet çemberi çizilmiştir. $|AD| = 7$ cm, $|AF| = 9$ cm ve $|DF| = 8$ cm olduğuna göre $|EF|$'nun kaç cm olduğunu bulunuz.

5.



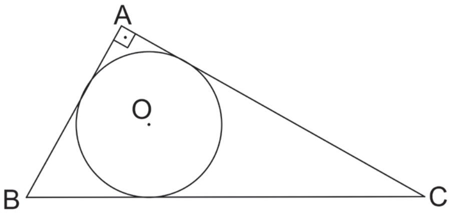
Yukarıdaki şekilde ABC üçgeninin O merkezli iç teğet çemberi çizilmiştir. A, O, E noktaları doğrusal, $|AB| = 6$ cm, $|AC| = 8$ cm ve $|BC| = 7$ cm olduğuna göre $|DE|$'nun kaç cm olduğunu bulunuz.

6.



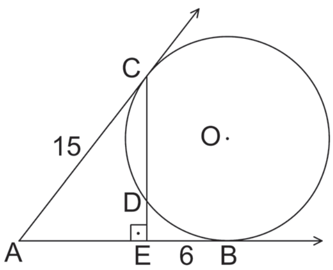
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD karesinde [AD] çaplı yarım çember çizilmiştir. [BE], F noktasında çembere teğettir. Çemberin yarıçapı 4 cm olduğuna göre $|EF|$'nun kaç cm olduğunu bulunuz.

7.



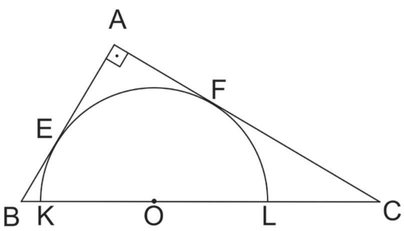
Yukarıdaki şekilde verilen O merkezli çember ABC dik üçgeninin kenarlarına içten teğettir. $|AB| = 9$ cm ve $|AC| = 12$ cm olduğuna göre çemberin yarıçap uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

8.



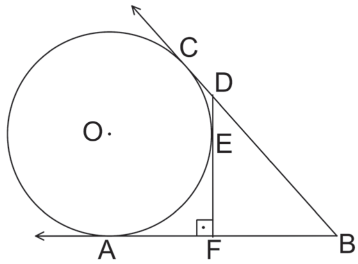
Yukarıdaki şekilde verilen O merkezli çembere $[AC$, C noktasında; $[AB$, B noktasında teğettir. $[CE] \perp [AB]$, $|AC| = 15$ cm ve $|EB| = 6$ cm olduğuna göre $|CD|$'nun kaç cm olduğunu bulunuz.

9.



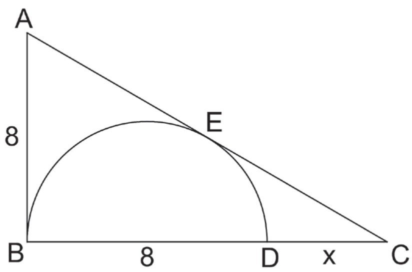
Yukarıdaki şekilde O merkezli yarım çembere $[AB$, E noktasında; $[AC$, F noktasında teğettir. B, K, O, L, C noktaları doğrusal, $[AB] \perp [AC]$, $|AB| = 12$ cm ve $|AC| = 24$ cm olduğuna göre $|KL|$'nun kaç cm olduğunu bulunuz.

10.



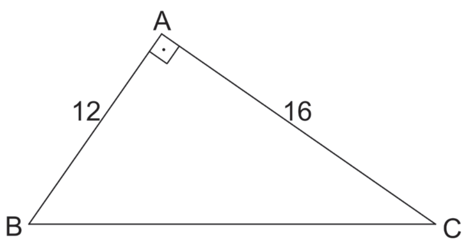
Yukarıdaki şekilde O merkezli çembere $[BC$, C noktasında; $[BA$, A noktasında ve $[DF]$, E noktasında teğettir. $[DF] \perp [AB]$, çemberin yarıçap uzunluğu 6 cm ve $|CD| = 3$ cm olduğuna göre BFD üçgeninin çevresinin kaç cm olduğunu bulunuz.

11.



Yukarıdaki şekilde verilen $[BD]$ çaplı çembere $[AB]$, B noktasında ve $[AC]$, E noktasında teğettir. B, D, C noktaları doğrusal ve $|AB| = |BD| = 8$ cm olduğuna göre $|DC| = x$'in kaç cm olduğunu bulunuz.

12.



Yukarıdaki şekilde verilen ABC dik üçgeninde $[AB] \perp [AC]$, $|AB| = 12$ cm ve $|AC| = 16$ cm olduğuna göre ABC dik üçgeninin iç teğet çemberi ile çevrel çemberinin merkezleri arasındaki uzaklığın kaç cm olduğunu bulunuz.

11.5.4. Dairenin Çevresi ve Alanı

Terimler ve Kavramlar
- Yay Uzunluğu
- Daire
- Daire Dilimi

Neler Öğreneceksiniz?

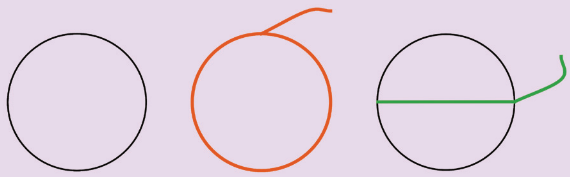
- Dairenin çevre ve alan bağıntılarını oluşturmayı öğreneceksiniz.

11.5.4.1. Dairenin Çevre ve Alan Bağıntıları

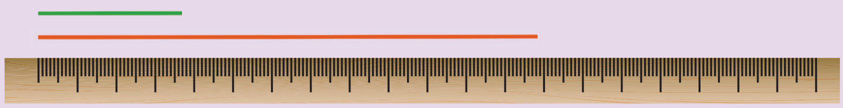
Bilgi

Bir çemberin kendisi ile iç bölgesinin birleşimine **daire** denir.
Herhangi bir dairenin çevre uzunluğunun çapının uzunluğuna oranı sabit bir sayı olup elde edilen bu orana π sayısı denir($\pi = 3{,}141592$ ...).

Buluyorum



Bir çemberin üzerindeki herhangi bir noktadan başlanarak bir iple aynı noktaya gelene kadar çevrelenip o noktadan ip kesilsin. Daha sonra başka bir iple aynı çember üzerinde bir nokta belirlenerek merkezden geçecek şekilde iple bir çap oluşturulsun ve o noktadan ip kesilsin.



Kesilen uzun ip ile kısa ipin boyları cetvelle ölçülüp uzun ipin boyunun kısa ipin boyuna oranı hesaplanır ve bu işlem farklı çemberlere de uygulandığında bu oranın hep aynı sayısal değeri verdiği görülür. Bu sayısal değer π dir. Bu durumda bir çemberde $\dfrac{\text{Çemberin çevre uzunluğu}}{\text{Çemberin çap uzunluğu}} = \pi$ olacaktır. Çap uzunluğu 2r olan bir çemberde

$\dfrac{\text{Çemberin çevre uzunluğu}}{2r} = \pi$ olup çemberin çevre uzunluğu $2\pi r$ olur.

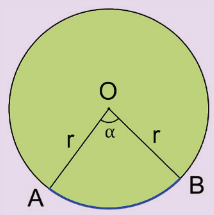
Örnek 1

Yarıçapı 8 cm olan bir dairenin çevresinin uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

Çözüm

r yarıçaplı dairenin çevresi $\text{Çevre} = 2\pi r$ olduğundan 8 cm yarıçaplı dairenin çevresi $2 \cdot \pi \cdot 8 = 16\pi$ cm olarak bulunur.

Buluyorum

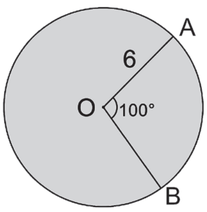


Yukarıda verilen O merkezli ve r yarıçaplı çember yayının tamamının derece türünden ölçüsü 360° olduğundan 360° lik yayın uzunluğu çemberin çevresi olan $2\pi r$ 'dir. Gördüğü merkez açının ölçüsü $m(\widehat{AOB}) = \alpha$ derece olan $|\widehat{AB}|$, orantı yardımıyla

$$\begin{array}{ccc} 2\pi r & & 360^\circ \\ |\widehat{AB}| & & \alpha \end{array}$$

$|\widehat{AB}| \cdot 360^\circ = 2\pi r \cdot \alpha$ olup $|\widehat{AB}| = 2\pi r \cdot \dfrac{\alpha}{360^\circ}$ olarak hesaplanır.

Örnek 2



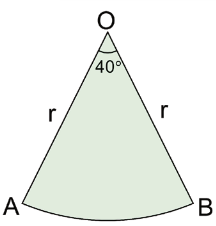
Yandaki şekilde verilen O merkezli dairede $m(\widehat{AOB}) = 100^\circ$ ve $|OA| = 6$ cm olduğuna göre $|\widehat{AB}|$'nun kaç cm olduğunu bulunuz.

Çözüm

Merkez açısı 100° olan açının gördüğü yay parçasının uzunluğu

$|\widehat{AB}| = 2\pi r \cdot \dfrac{\alpha}{360^\circ} = 2\pi \cdot 6 \cdot \dfrac{100^\circ}{360^\circ} = \dfrac{10\pi}{3}$ cm olur.

Örnek 3



Yarıçap uzunluğu r cm ve merkez açısının ölçüsü 40° olarak verilen yandaki O merkezli daire diliminde $|\widehat{AB}| = 2\pi$ cm olduğuna göre dairenin yarıçap uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

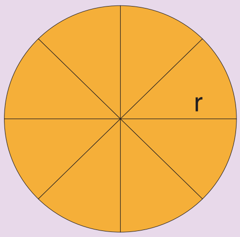
Çözüm

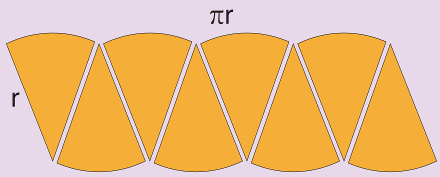
Yay parçasının uzunluğu $|\widehat{AB}| = 2\pi r \cdot \dfrac{\alpha}{360^\circ}$ olduğundan $\cancel{2\pi} = \cancel{2\pi} \cdot r \cdot \dfrac{40^\circ}{360^\circ} \Rightarrow 1 = r \cdot \dfrac{40^\circ}{360^\circ} \Rightarrow r = 9$ cm olur.

Buluyorum

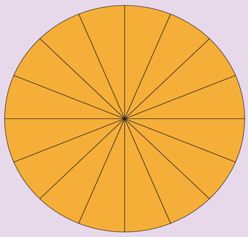
Bir dairenin alan formülü aşağıdaki gibi elde edilebilir.

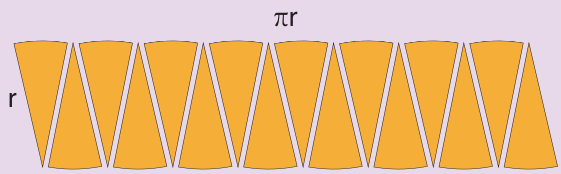
r yarıçaplı bir daire 8 eş dilime bölünüp elde edilen dilimler aşağıda verilen şekildeki gibi dizilsin. Bu durumda elde edilen şekil bir paralelkenara benzemektedir.



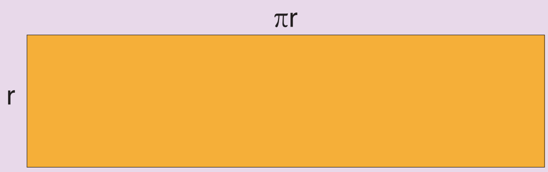


Aynı daire 16 eş dilime bölünüp aşağıda verilen şekildeki gibi dizilirse şeklin kıvrımları azalır. Şeklin alt ve üst kenarları dairenin çevresini oluşturduğundan her biri dairenin çevresinin uzunluğunu yarısıdır. Yan kenarların her biri de yarıçapa eşittir.





Bu şekilde daire daha çok dilime bölünüp elde edilen dilimler yan yana dizilirse şekil giderek bir dikdörtgene benzeyecektir.



Dikdörtgenin alanı, dik kenarların çarpımıdır. Buna göre Alan $= \pi r \cdot r = \pi r^2$ olup dairenin alanına eşittir.

Sonuç olarak yarıçapı r olan bir dairenin alanı πr^2 formülü ile hesaplanır.

Örnek 4

Yarıçapı 5 m olan daire şeklindeki bir pistin alanının kaç m^2 olduğunu bulunuz.

Çözüm

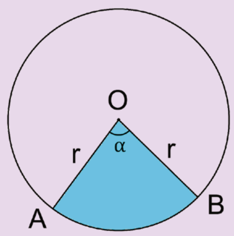
Yarıçapı r olan dairenin alanı πr^2 olduğundan 5 m yarıçaplı daire şeklindeki pistin alanı $\pi \cdot 5^2 = 25\pi$ m^2 olarak bulunur.

Bilgi

Dairede merkez açının kolları ve bu açının gördüğü yayla sınırlı olan bölgeye **daire dilimi** denir.

Buluyorum

Bir daire diliminin alan formülü aşağıdaki gibi elde edilebilir.



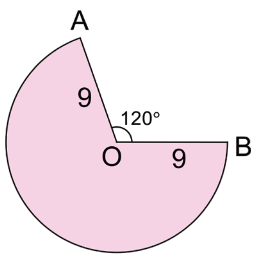
Yarıçapı r olan dairenin alanı πr^2 ise merkez açısının ölçüsü α olan daire diliminin alanı orantı yardımıyla

$$\begin{array}{ccc} 360^\circ & & \pi r^2 \\ & \times & \\ \alpha & & \text{Alan} \end{array}$$

$$\text{Alan} = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} \text{ olur.}$$

Sonuç olarak yukarıdaki şekilde verilen O merkezli, $|AO| = |BO| = r$ ve $m(\widehat{AOB}) = \alpha$ olarak verilen daire diliminin alanı $\pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$ formülü ile hesaplanır.

Örnek 5



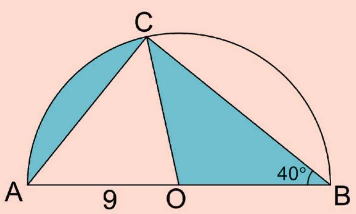
Yandaki şekilde verilen O merkezli, 9 cm yarıçaplı daire diliminde $m(\widehat{AOB}) = 120^\circ$ olduğuna göre daire diliminin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

Çözüm

Yarıçapı r ve merkez açısının ölçüsü α derece olan daire diliminin alanı $\pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$ formülü ile hesaplanır. Verilen daire diliminin merkez açısı $360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$ olduğundan daire diliminin alanı

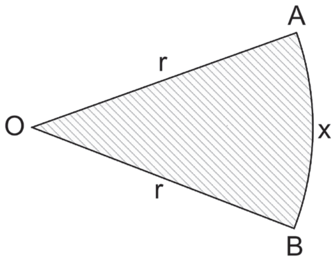
$$\pi \cdot 9^2 \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{240^\circ}}}{\underset{3}{\cancel{360^\circ}}} = \pi \cdot \overset{27}{\cancel{81}} \cdot \frac{2}{\underset{1}{\cancel{3}}} = 54\pi \text{ cm}^2$$ olarak bulunur.

Sıra Sizde



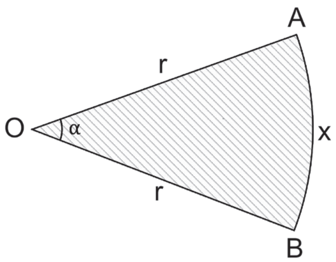
Yandaki şekilde verilen O merkezli, $[AB]$ çaplı yarım dairede $m(\widehat{CBA}) = 40^\circ$ ve $|AO| = 9$ cm olduğuna göre boyalı bölgelerin alanları toplamının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

Örnek 6



Yandaki şekilde verilen O merkezli daire diliminde $|OA| = |OB| = r$ cm ve $|\overset{\frown}{AB}| = x$ cm olduğuna göre daire diliminin alanının r ve x türünden eşitini bulunuz.

Çözüm



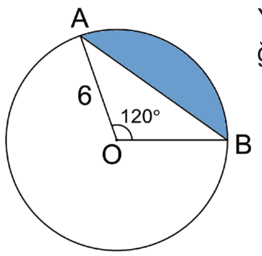
$m(\widehat{AOB}) = \alpha$ olsun.

$|\overset{\frown}{AB}| = 2\pi r \cdot \dfrac{\alpha}{360^\circ} = x$ olur. Bu eşitlikten $\dfrac{\alpha}{360^\circ} = \dfrac{x}{2\pi r}$ elde edilir.

Daire diliminin alan formülü olan $\pi r^2 \cdot \dfrac{\alpha}{360^\circ}$ ifadesinde $\dfrac{\alpha}{360^\circ}$ yerine elde edilen $\dfrac{x}{2\pi r}$ yazılırsa $\pi r^2 \cdot \dfrac{\alpha}{360^\circ} = \cancel{\pi} r^2 \cdot \dfrac{x}{2\cancel{\pi} r} = r \cdot \cancel{r} \cdot \dfrac{x}{2\cancel{r}} = \dfrac{r \cdot x}{2}$ elde edilir.

Buradan daire diliminin alanının $\dfrac{r \cdot x}{2}$ cm^2 olduğu görülür.

Örnek 7



Yandaki şekilde verilen O merkezli dairede $|OA| = 6$ cm ve $m(\widehat{AOB}) = 120^\circ$ olduğuna göre boyalı bölgenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

Çözüm

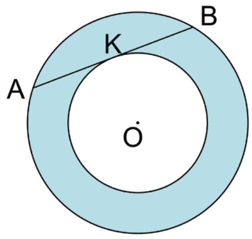
Boyalı bölgenin alanını bulmak için merkez açısının ölçüsü 120° olan daire diliminin alanından AOB üçgeninin alanı çıkarılır.

Daire diliminin alanı $\pi \cdot 6^2 \cdot \dfrac{\overset{1}{\cancel{120^\circ}}}{\underset{3}{\cancel{360^\circ}}} = \pi \cdot \overset{12}{\cancel{36}} \cdot \dfrac{1}{\underset{1}{\cancel{3}}} = 12\pi$ cm^2 olur.

AOB üçgeninin alanı $A(\widehat{AOB}) = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \sin 120^\circ = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ cm^2 olur.

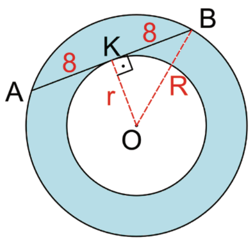
Buradan boyalı bölgenin alanı $12\pi - 9\sqrt{3}$ cm^2 olarak bulunur.

Örnek 8



Yandaki şekilde O merkezli iki çember verilmiştir. [AB] içteki çembere K noktasında teğettir. $|AB| = 16$ cm olduğuna göre iki çember arasında kalan boyalı bölgenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

Çözüm



[AB] içteki çembere teğet olduğundan [OK] çizilirse $[OK] \perp [AB]$ ve $|AK| = |KB| = 8$ cm olur. İçteki çemberin yarıçap uzunluğuna r, dıştaki çemberin yarıçap uzunluğuna R denilir ve [OB] çizilirse OKB dik üçgeni elde edilir. Bu dik üçgende Pisagor teoremi ile

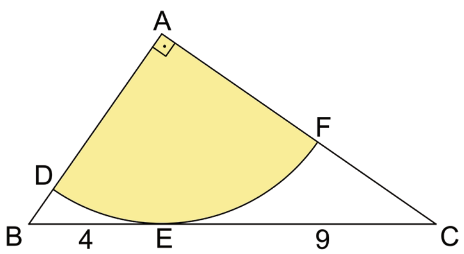
$|OB|^2 = |OK|^2 + |KB|^2$

$R^2 = r^2 + 8^2$

$R^2 - r^2 = 64$ olur.

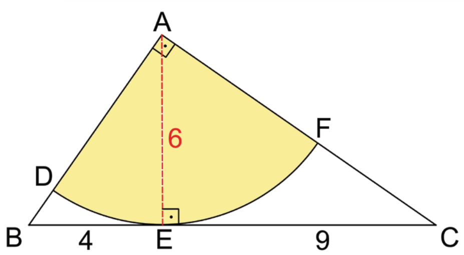
Boyalı bölgenin alanı için büyük dairenin alanından küçük dairenin alanı çıkarılırsa $\pi R^2 - \pi r^2$ bağıntısı elde edilir. Buradan boyalı bölgenin alanı $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi \underbrace{(R^2 - r^2)}_{64} = \pi \cdot 64 = 64\pi$ cm^2 olarak bulunur.

Örnek 9



[BC], yandaki şekilde verilen A merkezli çeyrek daireye E noktasında teğettir. A, D, B ile A, F, C noktaları doğrusal; $|BE| = 4$ cm ve $|EC| = 9$ cm olduğuna göre boyalı daire diliminin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

Çözüm



[AE], şekildeki gibi çizilsin. [BC], daireye E noktasında teğet olduğundan $[AE] \perp [BC]$ olur. ABC dik üçgeninde Öklid teoremi ile

$|AE|^2 = |BE| \cdot |EC|$

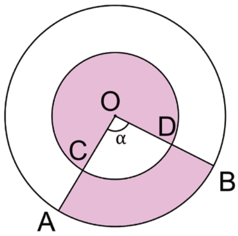
$|AE|^2 = 4 \cdot 9 = 36$

$|AE| = 6$ cm bulunur.

[AE], daire diliminin yarıçapı olduğundan çeyrek dairenin alanı

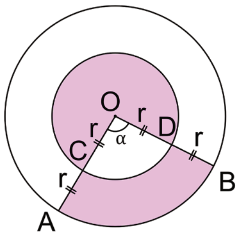
$\pi \cdot 6^2 \cdot \dfrac{\overset{1}{\cancel{90°}}}{\underset{4}{\cancel{360°}}} = \pi \cdot \overset{9}{\cancel{36}} \cdot \dfrac{1}{\underset{1}{\cancel{4}}} = 9\pi$ cm^2 olarak bulunur.

Örnek 10



Yandaki şekilde verilen O merkezli dairelerde $|AC| = |CO|$ ve boyalı bölgelerin alanları eşit olduğuna göre α açısının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.

Çözüm



$|AC| = |CO| = r$ olsun. İçteki boyalı daire diliminin merkez açısı $360^\circ - \alpha$ ve alanı $\pi r^2 \cdot \dfrac{360^\circ - \alpha}{360^\circ}$ olur.

İçteki dairenin dışında kalan boyalı parçanın alanı ise ölçüsü α derece olan 2r yarıçaplı daire diliminin alanından r yarıçaplı daire diliminin alanı çıkarılarak bulunur.

Buradan içteki dairenin dışında kalan boyalı parçanın alanı,

$\pi(2r)^2 \dfrac{\alpha}{360^\circ} - \pi r^2 \cdot \dfrac{\alpha}{360^\circ} = 3\pi r^2 \cdot \dfrac{\alpha}{360^\circ}$ olur.

Boyalı bölgelerin alanları eşit olduğundan bulunan ifadeler eşitlenirse

$$\pi r^2 \cdot \frac{360^\circ - \alpha}{360^\circ} = 3\pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

$$\cancel{\pi r^2} \cdot \frac{360^\circ - \alpha}{360^\circ} = 3\cancel{\pi r^2} \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

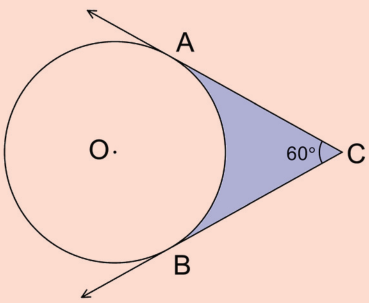
$$\frac{360^\circ - \alpha}{\cancel{360^\circ}} = \frac{3\alpha}{\cancel{360^\circ}}$$

$$360^\circ - \alpha = 3\alpha$$

$$4\alpha = 360^\circ$$

$\alpha = 90^\circ$ olarak bulunur.

Sıra Sizde



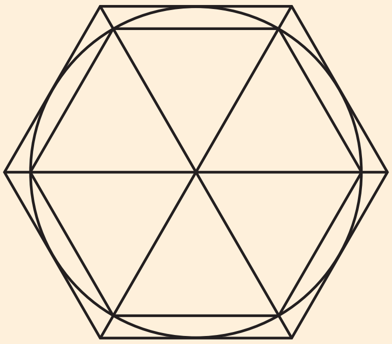
Yandaki şekilde $[CA$, A noktasında; $[CB$, B noktasında O merkezli daireye teğettir. $|AC| = 4\sqrt{3}$ cm ve $m(\widehat{ACB}) = 60^\circ$ olduğuna göre boyalı bölgenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

Bilim İnsanları

Archimedes (Arşimet) (MÖ 287 – MÖ 212)

Archimedes (Temsilî)

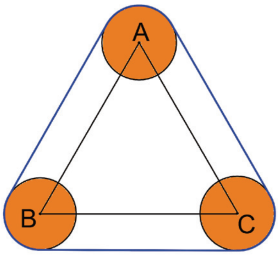
Bir dairenin çevresinin çapına oranının bulunması üzerine yaptığı değerlendirmelerle Arşimet, hesaplama konusunda nasıl bir yetenek olduğunu bir kez daha kanıtlamıştır. Dairenin içine ve dışına çizilen düzgün altıgenlerden yola çıkmış, daire çevresinin bu iki çokgenin çevrelerinin arasında bir değer olduğunu kanıtlamak amacıyla, Arşimet algoritması olarak da bilinen yöntemle kenarları sürekli ikiye bölmüş, sonuçta doksan altı kenarlı iki çokgen oluşturmuştur. P_n 'in dışa, P_n 'in içe çizilen n kenarlı çokgenlerin çevreleri olduğu varsayımıyla P, Pn, P_n, P_n, P_{2n}, P_{2n}, P_{4n}, P_{4n}, ..., dizisi tanımlanabilir. Üçüncüden başlayarak izleyen terimler, bir öncekilerin aritmetik ve geometrik ortalamaları alınarak bulunabilmektedir.
Bunu, $P_{2n} = 2_{pn}P_n/(p_n + P_n)$, $p_{2n} = \sqrt{p_n P_n}$ vb demektir. İstenirse a_n, A_n, a_{2n}, $A_{2n}, \dots$ dizisi de kullanılabilir; burada a ve A içe ve dışa çizilen n kenarlı çokgenlerin alanıdır. Üçüncü ve izleyen terimler yine bir önceki değerlerin aritmetik ve geometrik ortalamaları alınarak bulunabilmektedir. Örneğin, $a_{2n} = \sqrt{a_n, A_{2n}} = 2A_n a_{2n}/(a_n + A_{2n})$ vb. gibi. Çokgenlerin çevresini bulurken kullandığı karekök alma ve geometrik ortalama hesaplama yöntemi Babillilerin yöntemine çok benzemektedir. Arşimet'in daire hesaplarında p değeri, $3\frac{10}{71} < p < 3\frac{10}{70}$ eşitsizliğiyle ifade edilmektedir ki bu, Babil ve Mısır kestirimlerinden çok daha doğru bir değerdir. (Her şeye karşın unutmamamız gereken bir başka tarihi gerçek de, ne Arşimet'in ne de antik Yunan matematikçilerinden herhangi birinin daire çevresinin çapa oranını günümüzde kullanıldığı biçimiyle bir p değeri ile tanımladığıdır.) Bu değer, Arşimet'in Ortaçağda pek moda eserlerinden biri olan Dairenin Ölçümü Üzerine adlı bilimsel incelemenin 3. önermesinde verilmektedir. Bu kısa çalışma yalnızca üç önermeden oluşmaktadır ve büyük olasılıkla günümüze özgün eserden daha kısalmış bir biçimde ulaşmıştır. Bu üç önermeden biri tüketme yöntemi kullanılarak yapılan ve bir kenarı dairenin çevresi, bir diğer kenarı da dairenin yarıçapı olan bir dik üçgenin alanıyla daire alanının birbirine eşit olduğunun gösterildiği bir ispattır. Bu teoremi bulanın Arşimet olması pek olası değildir zira bu önerme, Dinostratus'un dairenin kareleştirilmesi probleminde kullanmış olduğu bir varsayımdır.
(...)



Arşimet'in daire çevresi bulmaya yönelik çalışması

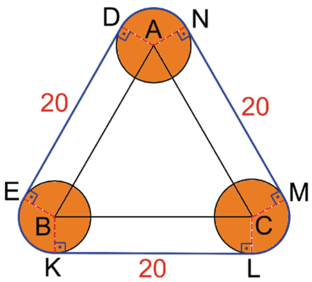
(Kısaltılmıştır.)
(Alıntı metin, aslına sadık kalınarak alınmış olup herhangi bir yazım ve noktalama değişikliği yapılmamıştır.)
Carl B. BOYER, *Matematiğin Tarihi*

Örnek 11



Yandaki şekilde ABC eşkenar üçgeninin köşelerine merkezleri köşeler üzerinde olan eş yarıçaplı daire şeklinde üç makara yerleştirilmiştir. Eşkenar üçgenin çevresi 60 cm ve makaraların yarıçap uzunluğu 4 cm olduğuna göre makaralara sarılı olan gergin ipin uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

Çözüm

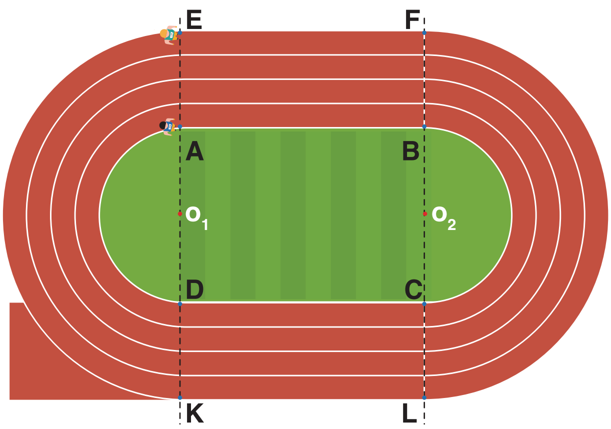


A köşesi şekildeki D ve N noktaları ile B köşesi E ve K noktaları ile, C köşesi M ve L noktaları ile birleştirilirse $[AD] \perp [DE]$ ve $[BE] \perp [DE]$ elde edilir. Gergin ipte $[DE] \mathbin{/\!/} [AB]$ olduğundan ADEB dikdörtgen olur. Benzer şekilde üçgenin diğer köşesine bu işlemler yapılırsa BKLC ve CMNA dikdörtgenleri elde edilir. $|AB| = |BC| = |CA| = 20$ cm olduğundan $|DE| = |KL| = |MN| = 20$ cm olur. Ayrıca ABC eşkenar üçgen olduğundan $m(\widehat{DAN}) = 360^\circ - 60^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 120^\circ$ bulunur. Benzer şekilde $m(\widehat{EBK}) = m(\widehat{LCM}) = 120^0$ olur. Ölçüsü 120° olan merkez açının gördüğü yaylar eşit olacağından bu yay parçalarının uzunlukları toplamı

$2\pi 4 \cdot \dfrac{\overset{1}{\cancel{120^0}}}{\underset{3}{\cancel{360^0}}} \cdot 3 = \pi \cdot 8 \cdot \dfrac{1}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3} = 8\pi$ cm bulunur. İpin toplam uzunluğu ise

$|ED| + |NM| + |LK| + |\widehat{DN}| + |\widehat{ML}| + |\widehat{KE}| = 20 + 20 + 20 + 8\pi = 60 + 8\pi$ cm olarak bulunur.

Örnek 12

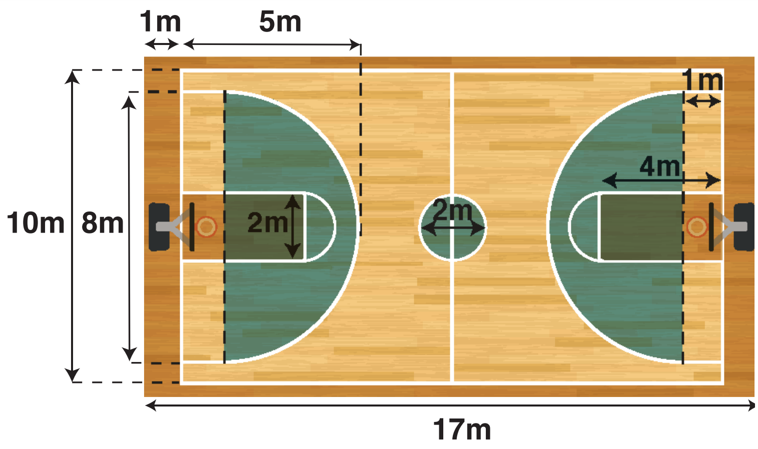


Yandaki şekilde O_1 ve O_2 merkezli iki yarım daire ve bu dairelerin dışında birer metre aralıklarla yerleştirilmiş aynı merkezli yarım dairelerden oluşan koşu pisti verilmiştir. Pistteki ABCD dikdörtgendir. A ve E noktalarında bulunan iki atlet bulundukları pist çizgisi üzerinde koşarak birer tur atıyorlar. Buna göre en dışta koşan atletin en içte koşan atletten kaç metre fazla koşacağını bulunuz.

Çözüm

Atletlerin koşacakları pistteki $[AB]$ ile $[EF]$ ve $[DC]$ ile $[KL]$ uzunlukları eşit olduğundan iki atletin koşacağı mesafeler arasındaki fark, daire yayları arasındaki fark olacaktır. İçteki dairenin yarıçap uzunluğu r metre olsun. Buradan en dıştaki dairenin yarıçapı $(r+4)$ metre olur. Dıştaki atletin iki yarım daire üzerinde koşacağı toplam yol $2\pi \cdot (r+4) = (2\pi r + 8\pi)$ metre, içteki atletin iki yarım daire üzerinde koşacağı toplam yol $2\pi r$ metre olur. Buradan dıştaki atlet içteki atletten $2\pi r + 8\pi - 2\pi r = 8\pi$ metre fazla koşar.

Örnek 13



Karaisalı Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesinin spor kulübünde bulunan öğrenciler okul bahçesine uygun ve yukarıdaki şekilde verilen boyutlardaki basketbol sahasını boyamak istiyorlar. Beden Eğitimi Öğretmeni Veysel Hoca bu iş için Akif ve Aslı'yı görevlendiriyor. Akif sahanın beyaz çizgilerini çizecek, Aslı ise pota altındaki yarım dairelerin içi ile sahanın ortasındaki dairenin içini boyayacaktır. Buna göre

I. Akif'in çizeceği çizgilerin uzunluğunun kaç metre olacağını bulunuz.

II. Aslı'nın boyayacağı alanın kaç m^2 olduğunu bulunuz (Çizgi kalınlığı önemsenmeyecektir.).

Çözüm

I. Basketbol sahasının eni 10 m ve boyu $17-1-1=15$ m olduğundan sahanın çevresi $2\cdot(10+15)=50$ m olur. Pota altındaki dikdörtgenlerin boyanacak üç kenarının uzunluğu toplamı $2\cdot(4+4+2)=20$ m olur. Ayrıca pota altındaki yayların ucundaki birer metre uzunluğundaki 4 parçanın toplam uzunluğu da 4 m olur. Yarıçapı 4 m olan çember yaylarının toplam uzunluğu $\frac{2\pi 4}{2}\cdot 2=8\pi$ ve yarıçap uzunluğu 1 m olan çember ve yayların toplam uzunluğu $2\pi 1+\frac{2\pi 1}{2}+\frac{2\pi 1}{2}=4\pi$ m olur. Sahayı ortalayan çizginin uzunluğu da 10 m olup beyaz çizgilerin uzunluklarının toplamı $50+20+4+8\pi+4\pi+10=84+12\pi$ m bulunur.

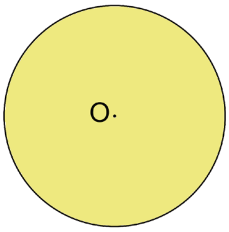
II. Aslı'nın boyayacağı bölgeler, yarıçap uzunluğu 4 m olan iki yarım daire ile yarıçap uzunluğu 1 m olan tam dairedir. Bu dairelerin alanları toplamı $\frac{\pi 4^2}{2}\cdot 2+\pi 1^2=16\pi+\pi=17\pi$ m^2 olarak bulunur.

Sıra Sizde

Lise öğrencisi Hamit, kendi yaptığı, mobil cihazlar için video oynatma uygulamasına yandaki gibi logo tasarlamak istiyor. Aynı merkezli iki çember ve içteki çember içine köşeleri bu çemberin üzerinde bulunan bir eşkenar üçgenden oluşan logoda dıştaki çemberin yarıçap uzunluğu, içteki çemberin yarıçap uzunluğunun iki katıdır. Buna göre eşkenar üçgenin alanının iki çember arasında kalan bölgenin alanına oranını bulunuz.

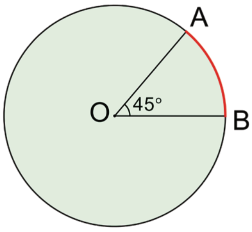
ALIŞTIRMALAR

1.



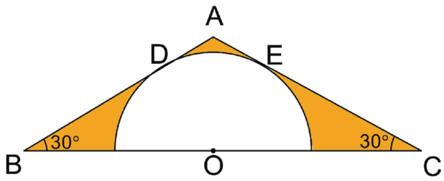
Yukarıdaki şekilde verilen O merkezli dairenin çevresi 10π cm olduğuna göre alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

2.



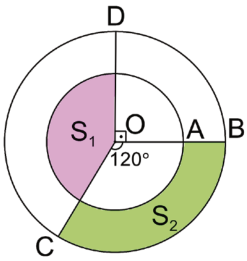
Yukarıdaki şekilde verilen O merkezli dairede $|\widehat{AB}| = 4\pi$ cm ve $m(\widehat{AOB}) = 45^\circ$ olduğuna göre dairenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

3.



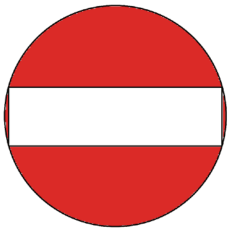
Yukarıdaki şekilde verilen ABC üçgeninde O merkezli yarım çember, üçgenin kenarlarına D ve E noktalarında teğettir. $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB}) = 30^\circ$ ve $|BC| = 24$ cm olduğuna göre boyalı bölgenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

4.



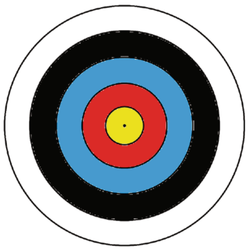
Yukarıdaki şekilde O merkezli iki daire verilmiştir. $m(\widehat{COB}) = 120^\circ$, $m(\widehat{DOB}) = 90^\circ$; $|OA| = 2$ cm, $|AB| = 1$ cm olduğuna ve S_1 ve S_2 bulundukları boyalı bölgenin alanını gösterdiğine göre $\frac{S_1}{S_2}$ oranını bulunuz.

5.



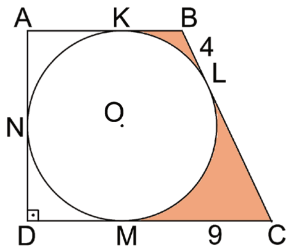
Yukarıdaki şekilde verilen "Girişi Olmayan Yol" levhasının içinde ve köşeleri daire üzerinde bulunan dikdörtgenin eni 14 cm, boyu 48 cm'dir. Buna göre dikdörtgenin dışında kalan boyalı bölgenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

6.



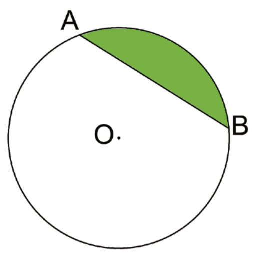
Yukarıdaki şekilde verilen O merkezli hedef tahtasında beşer cm aralıklarla iç içe 5 daire verilmiştir. En içteki dairenin yarıçapı 5 cm olduğuna göre kırmızı boyalı bölgenin alanının siyah boyalı bölgenin alanına oranını bulunuz.

7.



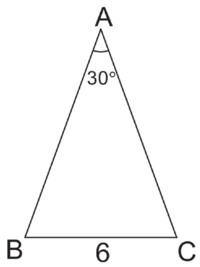
Yukarıdaki şekilde verilen ABCD dörtgeninde O merkezli çember, yamuğun kenarlarına K, L, M, N noktalarında teğettir. $[AB] \parallel [DC]$, $[AD] \perp [DC]$, $|MC| = 9$ cm ve $|BL| = 4$ cm olduğuna göre boyalı bölgenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

8.



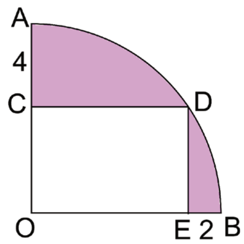
Yukarıdaki şekilde verilen O merkezli dairenin yarıçapı 6 cm ve $|AB| = 6\sqrt{3}$ cm olduğuna göre boyalı bölgenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

9.



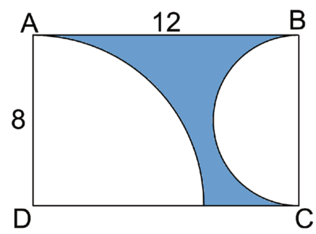
Yukarıdaki şekilde verilen ABC üçgeninde $m(\widehat{BAC}) = 30°$ ve $|BC| = 6$ cm olduğuna göre ABC üçgeninin çevrel çemberinin çevresinin uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

10.



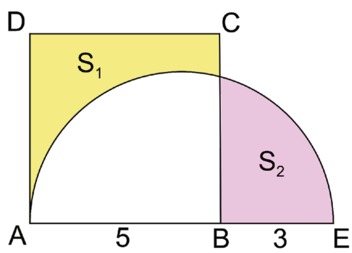
Yukarıdaki şekilde verilen O merkezli çeyrek dairede OCDE dikdörtgen, $|AC| = 4$ cm ve $|EB| = 2$ cm olduğuna göre boyalı bölgenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

11.



Yukarıdaki şekilde verilen ABCD dikdörtgeninde D merkezli çeyrek çember ve $[BC]$ çaplı yarım çember verilmiştir. $|AB| = 12$ cm ve $|AD| = 8$ cm olduğuna göre boyalı bölgenin çevresinin uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

12.



Yukarıdaki şekilde ABCD karesi ve $[AE]$ çaplı yarım daire verilmiştir. $|AB| = 5$ cm, $|BE| = 3$ cm'dir. S_1 ve S_2 bulundukları boyalı bölgenin alanını gösterdiğine göre $S_2 - S_1$ değerinin kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 1

A) Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerlere doğru ifadeyi yazınız.

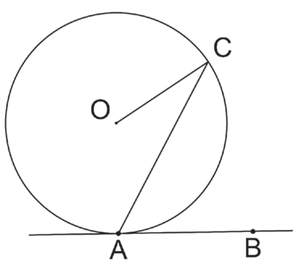
1. Düzlemde sabit bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesine .... denir.

2. Bir çemberle bir doğru yalnız bir noktada kesişiyorsa bu doğruya .... denir.

3. Bir çemberde çevre açının ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsünün .... eşittir.

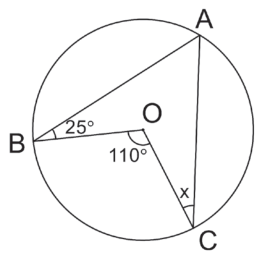
B) Aşağıdaki açık uçlu soruların doğru cevabını bulunuz.

4.



Yukarıdaki şekilde verilen O merkezli çemberde AB doğrusu çembere A noktasında teğettir. $m(\widehat{OCA}) = 20^\circ$ olduğuna göre CAB açısının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.

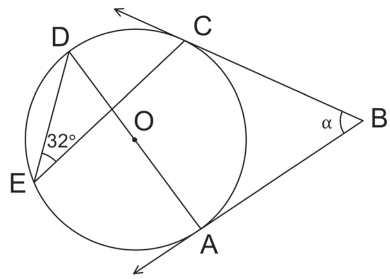
5.



Yukarıdaki şekilde verilen O merkezli çemberde $m(\widehat{ABO}) = 25^\circ$, $m(\widehat{BOC}) = 110^\circ$ ve $m(\widehat{ACO}) = x$ olduğuna göre x'in kaç derece olduğunu bulunuz.

C) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruların doğru seçeneğini işaretleyiniz.

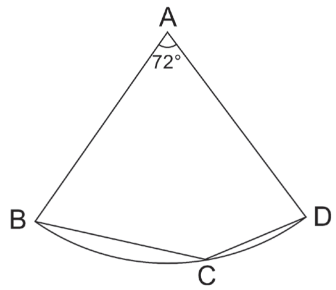
6.



Yukarıdaki şekilde verilen $[AD]$ çaplı, O merkezli çemberde $[BC$, C noktasında; $[BA$, A noktasında çembere teğettir. $m(\widehat{DEC}) = 32^\circ$ ve $m(\widehat{ABC}) = \alpha$ olduğuna göre α kaç derecedir?

A) 32 B) 36 C) 48 D) 64 E) 72

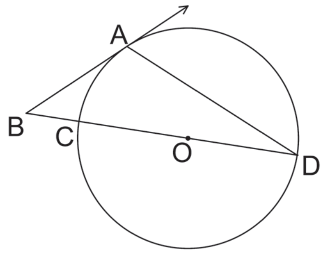
7.



Yukarıdaki şekilde verilen A merkezli çember yayında $m(\widehat{BAD}) = 72^\circ$ olduğuna göre BCD açısının ölçüsü kaç derecedir?

A) 108 B) 120 C) 128 D) 132 E) 144

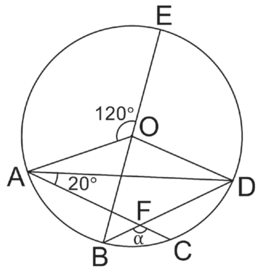
8.



Yukarıdaki şekilde verilen O merkezli çemberde B, C, O, D noktaları doğrusal ve [BA çembere A noktasında teğettir. $m(\widehat{ABC}) = 42^\circ$ olduğuna göre ADC açısının ölçüsü kaç derecedir?

A) 24 B) 28 C) 32 D) 36 E) 42

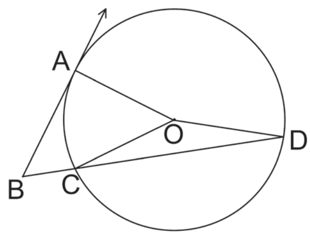
9.



Yukarıdaki şekilde verilen O merkezli çemberde [BE] çap, A, F, C ile B, F, D noktaları doğrusaldır. $m(\widehat{AOE}) = 120^\circ$, $m(\widehat{DAC}) = 20^\circ$ ve $m(\widehat{BFC}) = \alpha$ olduğuna göre α kaç derecedir?

A) 120 B) 130 C) 135 D) 140 E) 150

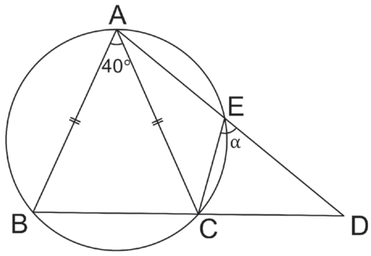
10.



Yukarıdaki şekilde verilen O merkezli çemberde [BA, A noktasında çembere teğet; B, C, D noktaları doğrusal; $m(\widehat{ABD}) = 50^\circ$ ve $m(\widehat{OCD}) = 20^\circ$ olduğuna göre AOD açısının ölçüsü kaç derecedir?

A) 130 B) 135 C) 140 D) 150 E) 160

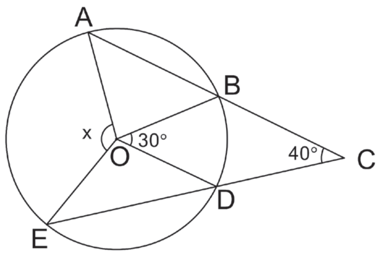
11.



Yukarıdaki şekilde verilen ABD üçgeninde A, E, D noktaları doğrusal; $|AB| = |AC|$, $m(\widehat{BAC}) = 40^\circ$ ve $m(\widehat{CED}) = \alpha$ olduğuna göre α kaç derecedir?

A) 60 B) 65 C) 70 D) 75 E) 80

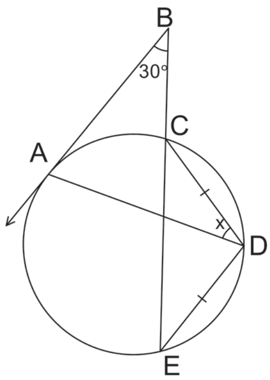
12.



Yukarıdaki şekilde verilen O merkezli çemberde A, B, C ve E, D, C noktaları doğrusaldır. $m(\widehat{BOD}) = 30^\circ$, $m(\widehat{ACE}) = 40^\circ$ ve $m(\widehat{AOE}) = x$ olduğuna göre x kaç derecedir?

A) 100 B) 110 C) 120 D) 125 E) 130

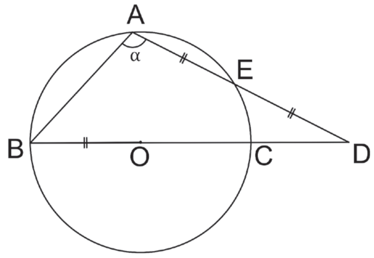
13.



Yukarıdaki şekilde [BA, A noktasında çembere teğettir. [BA // [DE], $|CD| = |DE|$, $m(\widehat{ABE}) = 30^\circ$ ve $m(\widehat{ADC}) = x$ olduğuna göre x kaç derecedir?

A) 30 B) 40 C) 45 D) 50 E) 60

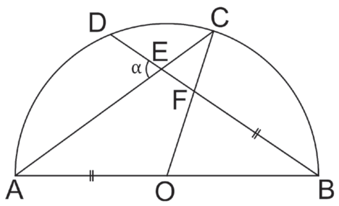
14.



Yukarıdaki şekilde verilen O merkezli çemberde B, O, C, D ve A, E, D noktaları doğrusaldır. $|AE| = |ED| = |BO|$ ve $m(\widehat{BAD}) = \alpha$ olduğuna göre α kaç derecedir?

A) 105 B) 110 C) 120 D) 130 E) 135

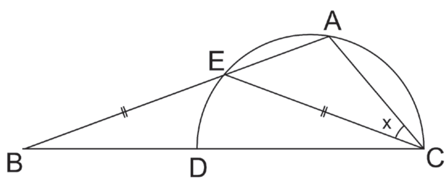
15.



Yukarıdaki şekilde verilen O merkezli $[AB]$ çaplı yarım çemberde D, E, F, B noktaları doğrusaldır. $|AO| = |FB|$, $m(\widehat{ACO}) = 35^\circ$ ve $m(\widehat{DEA}) = \alpha$ olduğuna göre α kaç derecedir?

A) 60 B) 70 C) 75 D) 80 E) 85

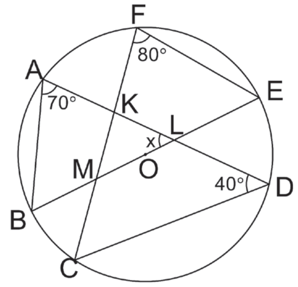
16.



Yukarıdaki şekilde verilen $[DC]$ çaplı çemberde B, D, C ve A, E, B noktaları doğrusaldır. $|EB| = |EC|$, $m(\widehat{ECD}) = 20^\circ$ ve $m(\widehat{ACE}) = x$ olduğuna göre x kaç derecedir?

A) 25 B) 30 C) 35 D) 40 E) 45

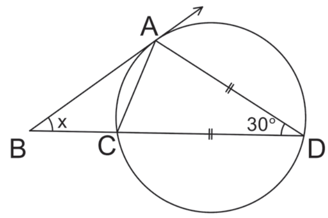
17.



Yukarıdaki şekilde verilen O merkezli $[BE]$ çaplı çemberde A, K, L, D noktaları; C, M, K, F noktaları ve B, M, O, L, E noktaları doğrusaldır. $m(\widehat{BAD}) = 70^\circ$, $m(\widehat{CFE}) = 80^\circ$, $m(\widehat{ADC}) = 40^\circ$ ve $m(\widehat{ALB}) = x$ olduğuna göre x kaç derecedir?

A) 45 B) 50 C) 55 D) 60 E) 65

18.



Yukarıdaki şekilde verilen çemberde $[BA$, A noktasında çembere teğettir. B, C, D noktaları doğrusal, $|AD| = |DC|$, $m(\widehat{ADC}) = 30^\circ$ ve $m(\widehat{ABD}) = x$ olduğuna göre x kaç derecedir?

A) 30 B) 35 C) 40 D) 45 E) 50

DEĞERLENDİRME

Cevaplarınızı cevap anahtarı ile karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorularla ilgili konuları veya faaliyetleri geri dönerek tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 2

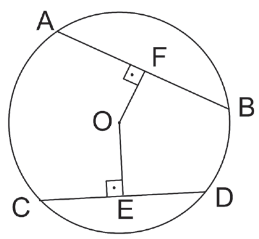
A) Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerlere doğru ifadeyi yazınız.

1. Bir çemberde merkezden eşit uzaklıkta bulunan kirişlerin uzunlukları .... olur.

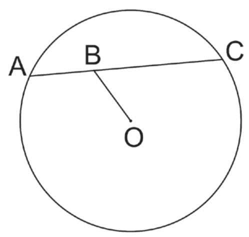
2. Bir çemberde merkezden kirişin .... noktasına inilen doğru kirişe diktir.

3. Bir üçgende iç açıortayların kesim noktası .... çemberin merkezidir.

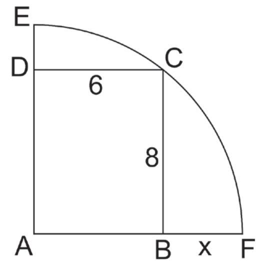
B) Aşağıdaki açık uçlu soruların doğru cevabını bulunuz.

4. 

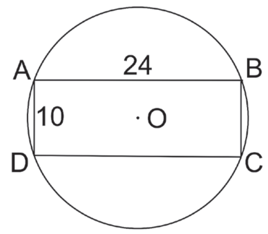
Yukarıdaki şekilde verilen O merkezli çemberde $[OF]\perp[AB]$, $[OE]\perp[CD]$; $|AB|>|CD|$; $|OF|=(2x+4)$ cm ve $|OE|=(3x-3)$ cm olduğuna göre x'in **en küçük** tam sayı değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.

5. 

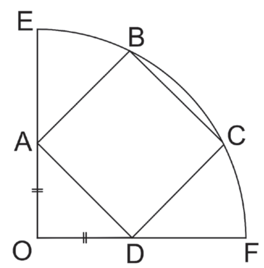
Yukarıdaki şekilde verilen O merkezli çemberde A, B, C noktaları doğrusaldır. $|AB|=3$ cm, $|BC|=7$ cm ve $|OB|=2\sqrt{5}$ cm olduğuna göre çemberin yarıçap uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

6. 

Yukarıdaki şekilde verilen A merkezli çeyrek çemberde ABCD dikdörtgendir. $|DC|=6$ cm, $|CB|=8$ cm ve $|BF|=x$ cm olduğuna göre x'in kaç cm olduğunu bulunuz.

7. 

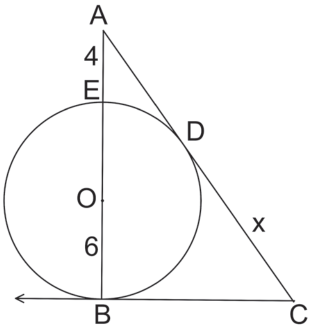
Yukarıdaki şekilde verilen O merkezli çemberde ABCD dikdörtgendir. $|AD|=10$ cm ve $|AB|=24$ cm olduğuna göre çemberin yarıçap uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

8. 

Yukarıdaki şekilde verilen O merkezli çeyrek çemberde ABCD karesinin köşeleri çember yayı ve yarıçaplar üzerindedir. $|AO|=|OD|=4$ cm olduğuna göre çemberin yarıçap uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

C) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruların doğru seçeneğini işaretleyiniz.

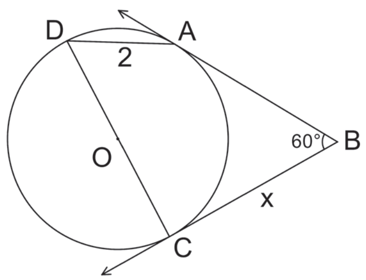
9.



Yukarıdaki şekilde verilen O merkezli çemberde $[CB$, B noktasında; $[CA]$, D noktasında çembere teğettir. A, E, O, B noktaları doğrusal; $|AE| = 4$ cm, $|OB| = 6$ cm ve $|DC| = x$ cm olduğuna göre x kaç cm'dir?

A) 9 B) 10 C) 12 D) 14 E) 15

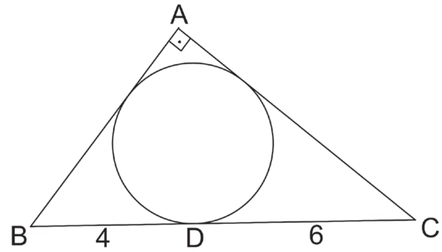
10.



Yukarıdaki şekilde verilen O merkezli $[CD]$ çaplı çemberde $[BA$, A noktasında; $[BC$, C noktasında çembere teğettir. $m(\widehat{ABC}) = 60°$, $|AD| = 2$ cm ve $|BC| = x$ cm olduğuna göre x kaç cm'dir?

A) $4\sqrt{3}$ B) $4\sqrt{2}$ C) 5 D) 4 E) $2\sqrt{3}$

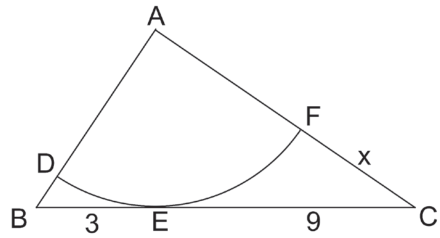
11.



Yukarıdaki şekilde verilen ABC dik üçgeninin iç teğet çemberi D noktasında $[BC]$ kenarına teğettir. $[AB] \perp [AC]$, $|BD| = 4$ cm ve $|DC| = 6$ cm olduğuna göre iç teğet çemberin yarıçap uzunluğu kaç cm'dir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

12.



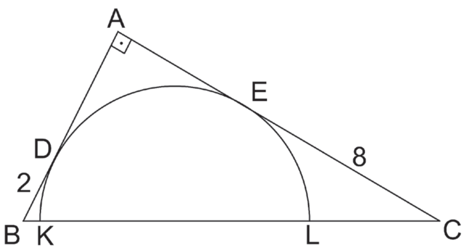
Yukarıdaki şekilde verilen ABC dik üçgeninde A merkezli çeyrek çember, E noktasında $[BC]$ kenarına teğettir. $|BE| = 3$ cm, $|EC| = 9$ cm ve $|FC| = x$ cm olduğuna göre x kaç cm'dir?

A) $3\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{3}$ C) 6 D) 7 E) $5\sqrt{2}$

13. Bir dik üçgende dik kenarlardan birinin uzunluğu, hipotenüs uzunluğunun yarısıdır. Buna göre bu dik üçgenin çevrel çemberinin yarıçap uzunluğunun diğer dik kenar uzunluğuna oranı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{2}$ D) $\sqrt{3}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

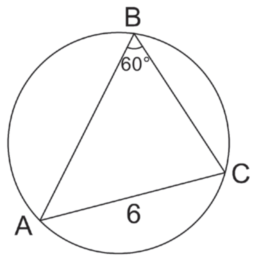
14.



Yukarıdaki şekilde verilen ABC dik üçgeninde $[KL]$ çaplı yarım çember $[AB]$'na D noktasında, $[AC]$'na E noktasında teğettir. $|DB| = 2$ cm ve $|EC| = 8$ cm olduğuna göre $|KL|$ kaç cm'dir?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

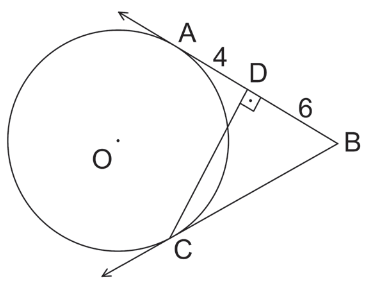
15.



Yukarıdaki şekilde ABC üçgeninin çevrel çemberi verilmiştir. $|AC| = 6$ cm ve $m(\widehat{ABC}) = 60°$ olduğuna göre çemberin yarıçap uzunluğu kaç cm'dir?

A) $3\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{3}$ C) 6 D) $2\sqrt{3}$ E) $6\sqrt{3}$

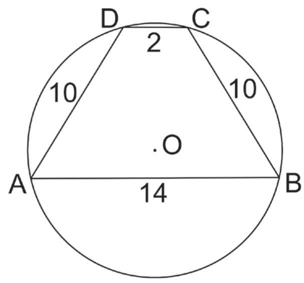
16.



Yukarıdaki şekilde verilen O merkezli çemberde $[BC$, C noktasında; $[BA$, A noktasında çembere teğettir. $[AB] \perp [DC]$, $|AD| = 4$ cm ve $|DB| = 6$ cm olduğuna göre $|DC|$ kaç cm'dir?

A) 6 B) 8 C) $6\sqrt{2}$ D) $6\sqrt{3}$ E) 9

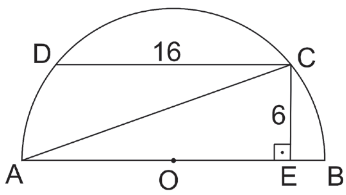
17.



Yukarıdaki şekilde ABCD ikizkenar yamuğunun köşelerinden geçen O merkezli çember verilmiştir. $[DC] \parallel [AB]$; $|AD| = |BC| = 10$ cm, $|DC| = 2$ cm ve $|AB| = 14$ cm olduğuna göre çemberin yarıçap uzunluğu kaç cm'dir?

A) 7 B) $5\sqrt{2}$ C) 8 D) $6\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{10}$

18.



Yukarıdaki şekilde verilen O merkezli, $[AB]$ çaplı yarım çemberde $[DC] \parallel [AB]$, $[CE] \perp [AB]$, $|CE| = 6$ cm ve $|DC| = 16$ cm olduğuna göre $|AC|$ kaç cm'dir?

A) $3\sqrt{5}$ B) 8 C) 10 D) $5\sqrt{10}$ E) $6\sqrt{10}$

DEĞERLENDİRME

Cevaplarınızı cevap anahtarı ile karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorularla ilgili konuları veya faaliyetleri geri dönerek tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 3

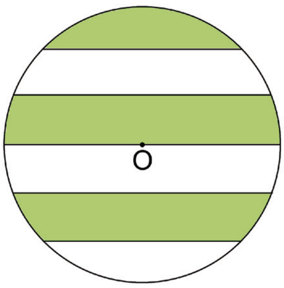
A) Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerlere doğru ifadeyi yazınız.

1. Yarıçapı r birim olan dairenin çevresi .... birimdir.

2. Yarıçapı r birim olan dairenin alanı .... birimkaredir.

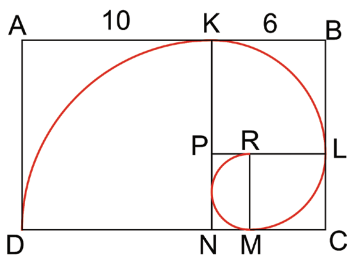
B) Aşağıdaki açık uçlu soruların doğru cevabını bulunuz.

3.



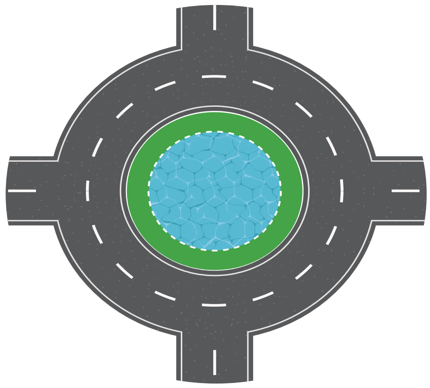
Yukarıdaki şekilde verilen O merkezli daire, birbirine paralel ve eşit uzaklıktaki kirişlerle altı parçaya ayrılmış ve parçalardan üçü şekildeki gibi boyanmıştır. Dairenin yarıçap uzunluğu 8 cm olduğuna göre boyalı bölgelerin alanları toplamının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

4.



Yukarıdaki şekilde AKND, KBLP ve RLCM kareleri ile N merkezli çeyrek çember yayı, P merkezli çeyrek çember yayı, R merkezli çeyrek çember yayı ve $[RM]$ çaplı yarım çember yayı verilmiştir. $|AK| = 10$ cm ve $|KB| = 6$ cm olduğuna göre çember yaylarının uzunlukları toplamının kaç cm olduğunu bulunuz.

5 - 7. soruları aşağıda verilen bilgilere göre cevaplayınız.



Bir peyzaj mimarı yeni yapılan bir yolda kavşak düzenlemesi yapacaktır. Bu kavşakta yapmayı düşündüğü süs havuzu ve yeşil alanla ilgili yaptığı çizim yukarıdaki şekilde verilmiştir. Bu çizimin oluşturulmasıyla ilgili bilgiler aşağıdaki gibidir.

- Merkezleri aynı olan iki farklı çember çiziyor.
- Küçük çemberin iç bölgesini havuz, iki çember arasında kalan bölgeyi yeşil alan olarak planlıyor.
- Havuzun içini maviye, yeşil alan için ayrılan bölgeyi yeşile boyuyor.

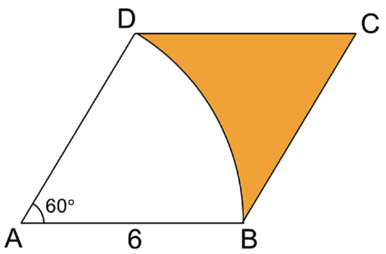
5. İçteki çemberin yarıçapı 7 m, dıştaki çemberin yarıçapı 9 m olduğuna göre yeşil alan için ayrılan alanın kaç m^2 olduğunu bulunuz.

6. Havuzun taban alanı ile yeşil alan için ayrılan bölgenin alanının eşit olabilmesi için dıştaki çemberin yarıçap uzunluğunun havuzun yarıçap uzunluğuna oranını bulunuz.

7. Havuzun yarıçapı 6 m ve dıştaki çemberin yarıçapı 9 m olarak planlanınca yeşil alan için ayrılan alana 900 m^3 toprak kullanılacaktır. Buna göre havuzun 6 m olan yarıçapı değiştirilmeden dıştaki çemberin yarıçap uzunluğu 1 m artırılırsa yeşil alan için ayrılan alana kaç m^3 daha toprak gerekeceğini bulunuz.

C) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruların doğru seçeneğini işaretleyiniz.

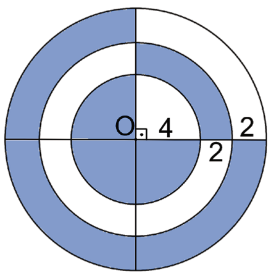
8.



Yukarıdaki şekilde verilen ABCD eşkenar dörtgeninde A merkezli çember yayı D ve B noktalarından geçmektedir. $m(\widehat{DAB}) = 60^\circ$ ve $|AB| = 6$ cm olduğuna göre boyalı bölgenin alanı kaç cm^2 dir?

A) $12\sqrt{3} - 3\pi$ B) $16\sqrt{3} - 6\pi$ C) $18\sqrt{3} - 6\pi$ D) $24\sqrt{3} - 9\pi$ E) $18\sqrt{3} - 9\pi$

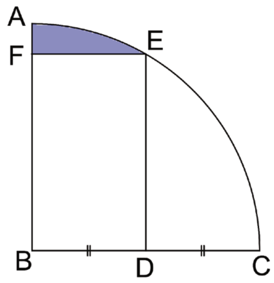
9.



Yukarıdaki şekilde verilen aynı O merkezli üç dairenin yarıçap uzunlukları içteki daireden dıştaki daireye doğru sıra ile 4, 6 ve 8 cm'dir. Her bir daire merkezden geçen doğrularla çeyrek dairelere bölünmüştür. Buna göre boyalı bölgelerin alanları toplamı kaç cm^2 dir?

A) 30π B) 34π C) 36π D) 38π E) 42π

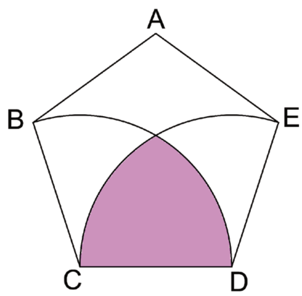
10.



Yukarıdaki şekilde verilen B merkezli çeyrek dairede BDEF dikdörtgendir. $|BD| = |DC|$ ve çemberin yarıçap uzunluğu 12 cm olduğuna göre boyalı bölgenin alanı kaç cm^2 dir?

A) $12\pi - 18\sqrt{3}$ B) $16\pi - 6\sqrt{3}$ C) $18\pi - 9\sqrt{3}$ D) $24\pi - 9\sqrt{3}$ E) $18\pi - 12$

11.



Yukarıdaki şekilde verilen ABCDE düzgün beşgeninde C merkezli daire dilimi B ve D noktalarından, D merkezli daire dilimi ise C ve E noktalarından geçmektedir. Düzgün beşgenin bir kenar uzunluğu 6 cm olduğuna göre boyalı bölgenin alanı kaç cm^2 dir?

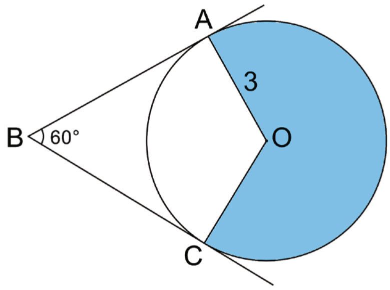
A) $18\pi - 6\sqrt{3}$ B) $12\pi - 9\sqrt{3}$ C) $16\pi - 12\sqrt{3}$ D) $12\pi - 6\sqrt{3}$ E) $12\pi - 12\sqrt{3}$

12.

Yukarıdaki şekilde verilen bisikletin ön tekerleğinin yarıçap uzunluğu 80 cm, arka tekerleğinin yarıçap uzunluğu 20 cm'dir. Bisiklet 120π metre yol gittiğinde arka tekerlek ön tekerlekten kaç tur fazla döner?

A) 75 B) 125 C) 225 D) 275 E) 300

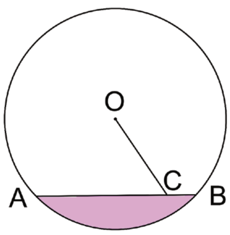
13.



Yukarıdaki şekilde verilen O merkezli çemberde $[BA$, A noktasında; $[BC$, C noktasında çembere teğettir. $m(\widehat{ABC}) = 60°$ ve çemberin yarıçap uzunluğu 3 cm olduğuna göre boyalı bölgenin alanı kaç cm^2 dir?

A) 3π B) 4π C) 6π D) 8π E) 9π

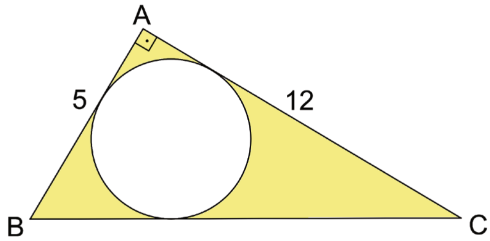
14.



Yukarıdaki şekilde verilen O merkezli dairede $[AB]$ kiriş, $|AC| = 14$ cm, $|CB| = 2$ cm ve $|OC| = 10$ cm olduğuna göre boyalı bölgenin alanı kaç cm^2 dir?

A) $16\pi - 36$ B) $18\pi - 32$ C) $32\pi - 32$ D) $32\pi - 64$ E) $64\pi - 64$

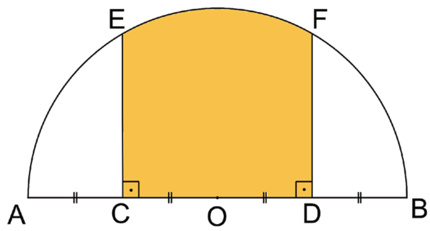
15.



Yukarıdaki şekilde ABC dik üçgeninin iç teğet çemberi verilmiştir. $[BA] \perp [AC]$, $|AB| = 5$ cm ve $|AC| = 12$ cm olduğuna göre iç teğet çemberin dışında kalan boyalı bölgenin alanı kaç cm^2 dir?

A) $30 - 2\pi$ B) $30 - 4\pi$ C) $30 - 6\pi$ D) $30 - 9\pi$ E) $60 - 9\pi$

16.



Yukarıdaki şekilde O merkezli, $[AB]$ çaplı yarım daire verilmiştir. $[EC] \perp [AB]$, $[FD] \perp [AB]$; $|AC| = |CO| = |OD| = |DB|$ ve $|AB| = 24$ cm olduğuna göre boyalı bölgenin alanı kaç cm^2 dir?

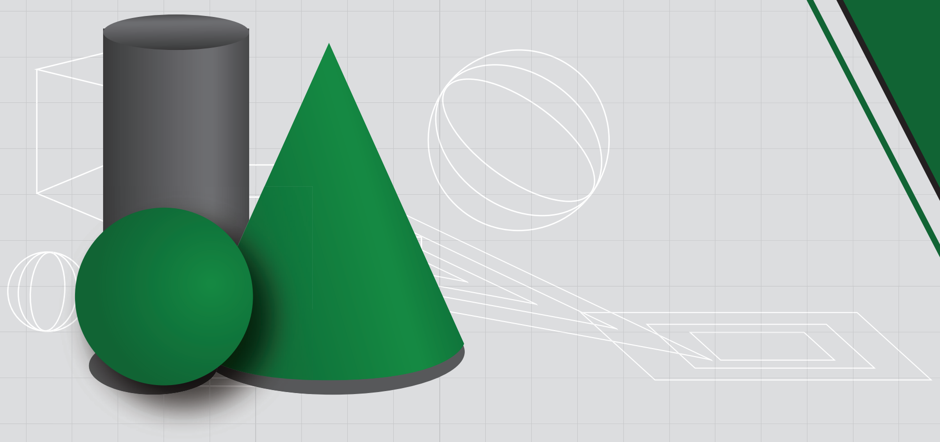
A) $24\pi + 36\sqrt{3}$ B) $18\pi + 36\sqrt{3}$ C) $32\pi + 32\sqrt{3}$ D) $24\pi - 18\sqrt{3}$ E) $36\pi + 36\sqrt{3}$

DEĞERLENDİRME

Cevaplarınızı cevap anahtarı ile karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorularla ilgili konuları veya faaliyetleri geri dönerek tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.

GEOMETRİ

6



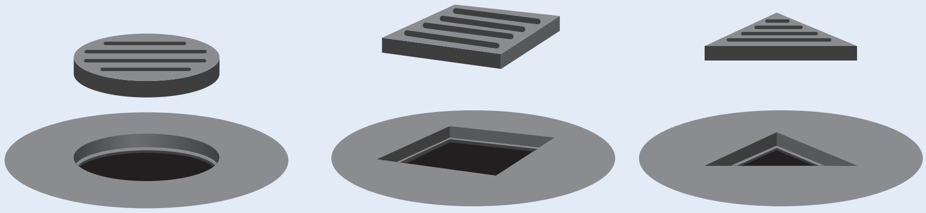
Uzay Geometri

11.6.1. Katı Cisimler

11.6. UZAY GEOMETRİ

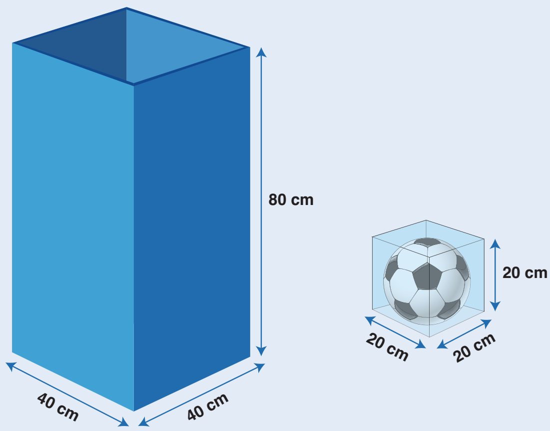
Hazırlık Çalışması

1.



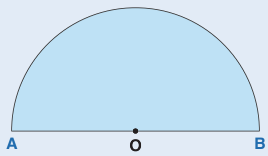
Bir belediye, yağan yağmur sularının cadde üstünde fazla birikmemesi için belirli aralıklarla kanalizasyon girişlerine rögar kapakları koymayı planlıyor. Yukarıda belediyenin yaptıracağı üç kapak şekli verilmiştir. Bu kapaklardan hangisinin bulunduğu rögarın içine kesinlikle düşmeyeceğini bulunuz.

2.



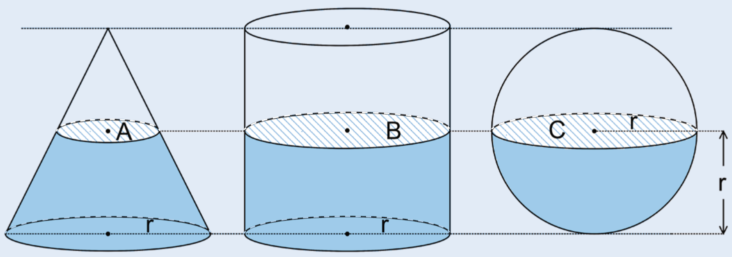
Bir kenar uzunluğu 20 cm olan küp şeklindeki kutuların içerisine küre şeklindeki toplardan kutunun kenarlarına teğet olacak şekilde birer adet konuluyor. Bu kutular ise boyutları 40 cm, 40 cm, 80 cm olan kare prizma şeklindeki kolilere boşluk kalmayacak şekilde yerleştiriliyor. Buna göre bir kolinin içine kaç top konulabileceğini bulunuz.

3.



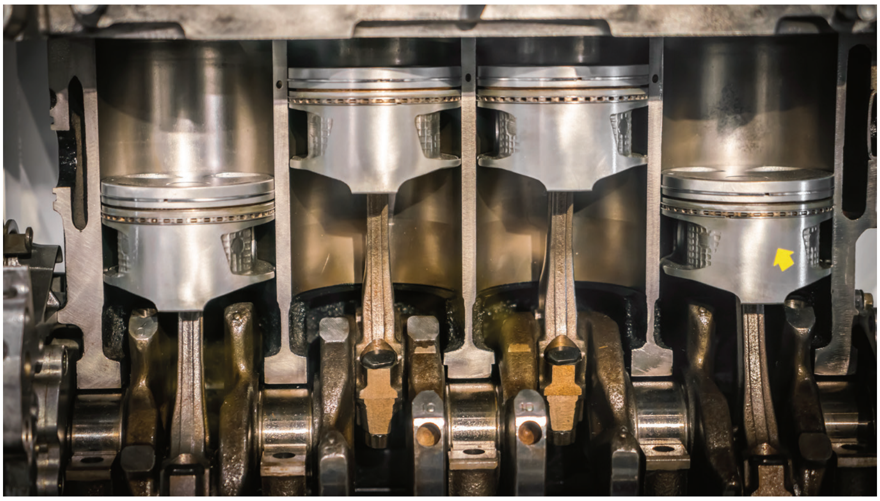
Şekilde verilen O merkezli, [AB] çaplı yarım daire şeklindeki kâğıt, [AO] ve [OB] çakışacak şekilde kıvrılarak tabanı daire olan bir şekil elde ediliyor. Oluşan şeklin ne olduğunu bulunuz.

4.



Şekilde verilen koni ve silindirin taban yarıçapları ve kürenin yarıçapı r birim, koni ile silindirin yüksekliği ise 2r birimdir. Bu cisimler r birim yüksekliğine kadar su doldurulduğunda kapların içindeki suların üst yüzey alanları şekildeki gibi A, B, C birimkaredir. Buna göre A, B, C değerlerinin büyüklükleri arasındaki ilişkiyi bulunuz.

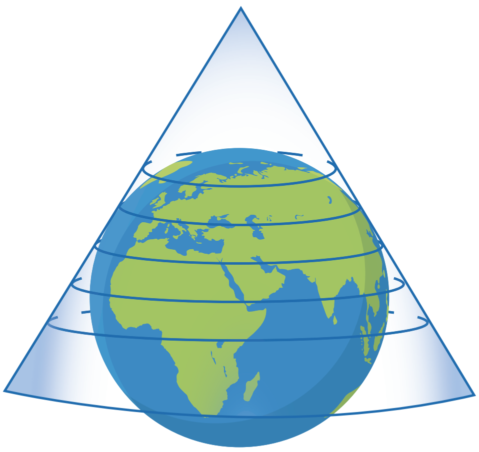
Günümüze ulaşan kadim yapıların bizi hayrete düşüren yönleri vardır: malzemenin elde edilmesi, taşınması ve yapım aşamasında kullanılan tekniklerin dönemin koşullarına göre büsbütün yenilikler içermesi... Günümüzün makinelerinin yapı taşını oluşturan motorların henüz icat edilmediği dönemlerde yapımda kullanılacak malzemenin elde edilmesi ve inşa alanına taşınması dönemin mühendislerinin önündeki büyük sorunlardan biri olmuştur. Tarihe iz bırakan büyük mimari eserlerin yapımında silindir şeklindeki tomruklar kullanılmıştır. Geçmişten günümüze ayakta kalmış Sultan Ahmet Camii, Ayasofya gibi eserlerin inşasında kullanılan dev sütun veya taşlar, tomruklar üzerinde kaydırılarak inşaat alanına getirilmiştir. Silindir şeklindeki taş sütunlar ve ağaçtan tomruklar hem bu yapıların malzemesi hem de malzemenin taşınmasında yardımcı unsur olarak kullanılmıştır.



Silindir, küre ve koni şeklindeki nesnelerin günlük hayatta kullanımına ilişkin örnekler yukarıdakilerle sınırlı değildir. İnsan vücudundaki kalbin görevi neyse makineleri harekete geçiren motorun görevi de odur. Motoru oluşturan en önemli parçalardan biri de silindir şeklindeki pistondur. Tarih içinde geliştirilen tekniğin temel alınmasıyla günümüze yaklaştıkça yeni icatlar teknolojiyi doğurmuş, motorun icat edilmesiyle ulaşım hızlanmış, teknolojinin hızla gelişimiyle dev yapıların inşası geçmişte uzun yılları alırken günümüzde bu yapılar çok kısa sürede tamamlanır olmuştur.

Hareketi hızlandırmayı, aşınmanın önüne geçerek etkin ve hızlı kullanım sağlamayı amaçlayan küre şeklindeki bilyelerin de geçmişten beri günlük hayattaki rolü büyüktür ve bu kürelere çekmece aparatlarından motorlu taşıtlara kadar birçok yerde rastlamak mümkündür.

Haritacılıkta amaca uygun çizim yapılabilmesi için projeksiyonlar kullanılmaktadır. Bu projeksiyonların en önemlileri silindirik ve konik projeksiyonlardır. Bu örnekleri çoğaltmak mümkündür.



Bu bölümde hayatınızın her alanında yer alan silindir, küre ve koniye ait özellikleri inceleyeceksiniz.

11.6.1. Katı Cisimler

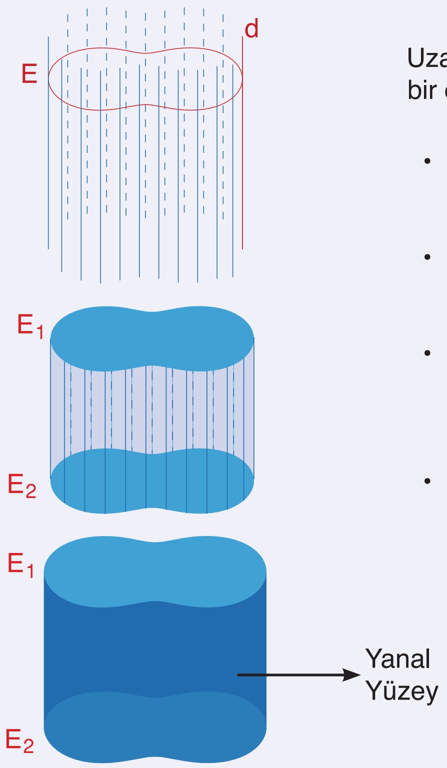
Terimler ve Kavramlar
- Dik Dairesel Silindir
- Dik Dairesel Koni
- Küre
- Ana Doğru
- Tepe Noktası

Neler Öğreneceksiniz?
- Küre, dik dairesel silindir ve dik dairesel koninin alan ve hacim bağıntılarını oluşturarak işlemler yapmayı öğreneceksiniz.

11.6.1.1. Küre, Dik Dairesel Silindir ve Dik Dairesel Koninin Alan ve Hacim Bağıntıları

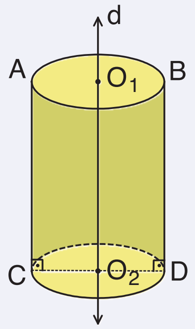
Dik Dairesel Silindir

Bilgi



Uzayda kapalı bir E eğrisi ile bu eğrinin düzlemine paralel olmayan bir d doğrusu verilmiş olsun.

- E eğrisini kesen ve d doğrusuna paralel olan doğruların birleşim kümesine **silindirik yüzey** denir.
- E eğrisinden geçen ve d doğrusuna paralel olan doğruların her birine **silindirik yüzeyin ana doğrusu** denir.
- Bir silindirik yüzey ile ana doğruları kesen paralel iki düzlemin (E_1 ve E_2) sınırladığı katı cisme **silindir** denir. E_1 ve E_2 eğrilerine **silindirin tabanları** denir.
- Tabanların sınırladığı silindirik yüzeye **silindirin yanal yüzeyi** denir. Tabanların ait olduğu paralel düzlemler arasındaki uzaklığa ise **silindirin yüksekliği** denir.



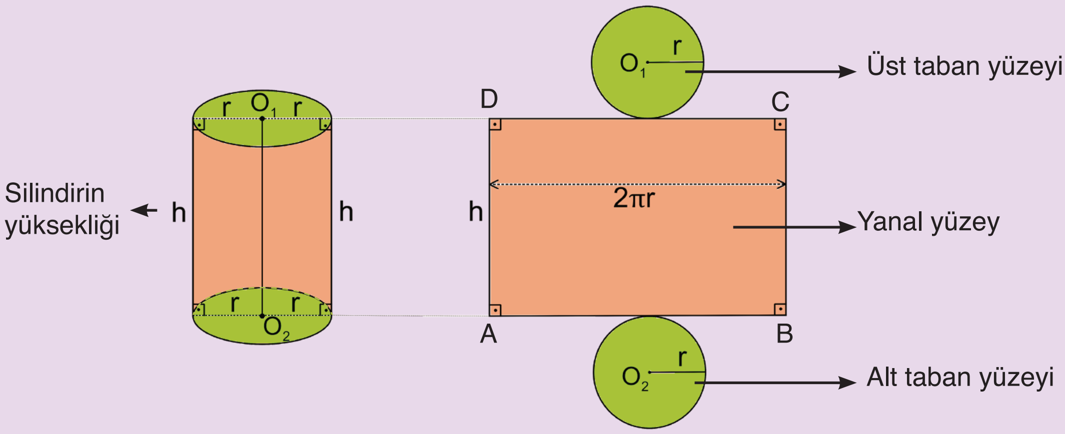
Dik dairesel silindir

- Ana doğruları taban düzlemine dik olan silindirlere **dik silindir** denir.
- Tabanı daire olan silindirlere **dairesel silindir** denir.
- Üst taban merkezi olan O_1 ve alt taban merkezi olan O_2 noktalarından geçen doğruya **silindirin ekseni** denir.
- Ana doğruları taban düzlemine dik olan ve tabanı daire olan silindirlere **dik dairesel silindir** denir.

Kitabın bundan sonraki kısmında kolaylık olması açısından "silindir" denildiğinde "dik dairesel silindir" anlaşılmalıdır.

Buluyorum

Aşağıdaki şekilde bir silindir ve açınımı verilmiştir.

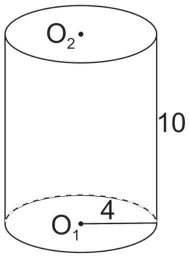


Bu silindirin yanal alanı, taban alanı ve yüzey alanı aşağıdaki gibi bulunur.

Taban yarıçapı r ve yüksekliği h olan bu silindirin yanal yüzünün açınımı ABCD dikdörtgenidir. $|AB|$, taban dairelerini oluşturan çemberlerin çevresine eşit olup $|AB| = |DC| = 2\pi r$ olur. Ayrıca $|AD| = |BC| = h$ silindirin yüksekliğidir.

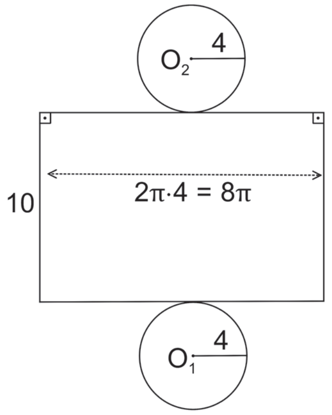
- Silindirin yanal alanı, ABCD dikdörtgeninin alanı olduğundan
  Silindirin yanal alanı $A(ABCD) = 2\pi rh$ olur.
- Silindirin tabanları, eş olan daireler olduğundan her bir taban alanı πr^2 olur.
- Silindirin yüzey alanı, yanal alanı ile iki eş taban alanının toplamı olduğundan
  Silindirin yüzey alanı $2\pi r \cdot h + 2\pi r^2 = 2\pi r \cdot (h + r)$ ile bulunur.

Örnek 1



Taban merkezleri O_1 ve O_2 olan yandaki silindirin taban yarıçapı 4 cm, yüksekliği 10 cm'dir. Buna göre silindirin açınımını çizerek yüzey alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

Çözüm



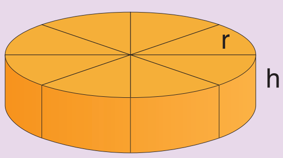
Silindirin açınımı yanda verilen şekildeki gibi yapılır.
Yüzey alanı A olmak üzere

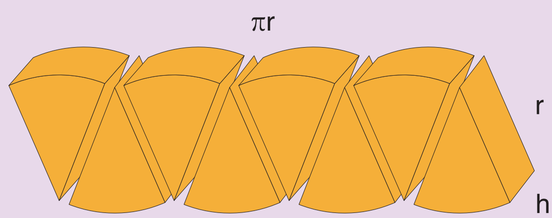
$$\begin{aligned} A &= 2\pi \cdot r \cdot h + 2\pi r^2 \\ &= 2\pi \cdot 4 \cdot 10 + 2\pi \cdot 4^2 \\ &= 80\pi + 32\pi \\ &= 112\pi \ cm^2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Buluyorum

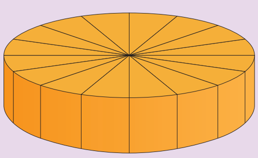
Bir silindirin hacim formülü aşağıdaki gibi elde edilebilir.

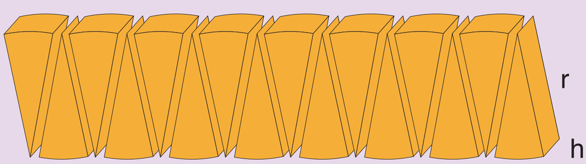
Yarıçapı r, yüksekliği h olan bir silindir 8 eş dilime bölünüp elde edilen dilimler aşağıda verilen şekildeki gibi dizilsin.



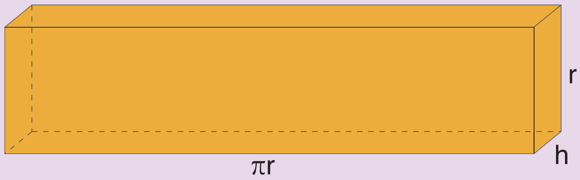


Aynı silindir 16 eş dilime bölünüp aşağıda verilen şekildeki gibi dizilirse şeklin kıvrımları azalır. Şeklin alt ve üst taban alanları silindirin yanal alanının yarısıdır. Silindirin yarıçapı prizmanın yüksekliğine eşittir.





Bu şekilde silindir daha çok dilime bölünüp elde edilen dilimler yan yana dizilirse şekil giderek bir dikdörtgenler prizmasına benzeyecektir.



Dikdörtgenler prizmasının hacmi, prizmanın taban alanı ile yüksekliğinin çarpımı olup silindirin hacmine eşittir. Sonuç olarak silindirin hacmi $\pi r \cdot h \cdot r = \pi r^2 h$ olur.

Örnek 2

Taban dairesinin yarıçapı 5 cm ve yüksekliği 12 cm olan silindirin hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

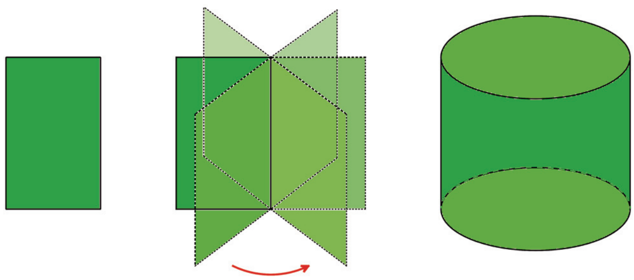
Çözüm

Silindirin taban yarıçapı $r = 5$ cm ve yüksekliği $h = 12$ cm olmak üzere silindirin hacmi $\pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 300\pi$ cm^3 bulunur.

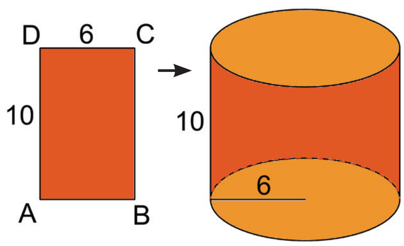
Örnek 3

Ayrıt uzunlukları 6 cm ve 10 cm olan dikdörtgen uzun kenarı etrafında 360° döndürüldüğünde tarayacağı bölgenin hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

Çözüm



Bir dikdörtgen herhangi bir kenarı etrafında 360° döndürülürse taradığı bölge silindir olur. Etrafında döndürülen kenarın uzunluğu silindirin yüksekliği, diğer kenarın uzunluğu ise taban yarıçapı olur.

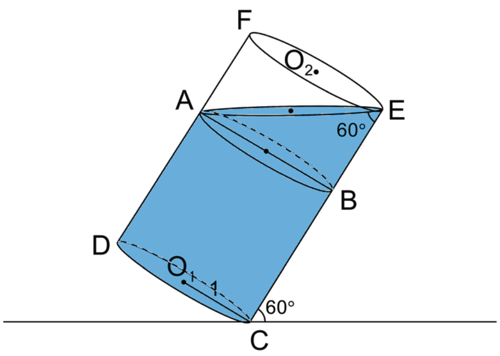


Ayrıt uzunlukları 6 cm ve 10 cm olan dikdörtgen yandaki şekilde çizilip köşeleri A, B, C, D olarak isimlendirilsin. ABCD dikdörtgeni uzun kenarı olan $[AD]$ etrafında döndürüldüğünde oluşan silindirin yüksekliği $h = 10$ cm ve taban yarıçapı $r = 6$ cm olur. Bu durumda elde edilecek silindir şeklindeki bölgenin hacmi $\pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 6^2 \cdot 10 = 360\pi$ cm^3 olur.

Örnek 4

Taban yarıçapı 1 m ve yüksekliği 3 m olan içi su ile dolu silindir şeklindeki üstü açık bir depo yer düzlemi ile 60° lik açı yapacak şekilde eğildiğinde depodan kaç m^3 su döküleceğini bulunuz.

Çözüm



Taban merkezleri O_1 ve O_2 olan yandaki silindir eğildiğinde su yüzeyi yer düzlemine paralel olur. Bu durumda yanda verilen şekildeki gibi duran deponun içinde yüksekliği $|AD| = |BC|$ olan silindir şeklindeki bölgenin tamamı ve yüksekliği $|FA| = |BE|$ olan silindir şeklindeki bölgenin hacminin yarısı su ile dolu kalır. Ayrıca $[AE]$ yer düzlemine paralel olduğundan $m(\widehat{AEB}) = 60^\circ$ olur.
ABE üçgeni 30°, 60°, 90° dik üçgeni olduğundan
$|BE| = \dfrac{|AB|}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ m elde edilir.

Dökülen su, yüksekliği $|AF| = |BE| = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ m olan silindirin hacminin yarısı kadar olduğundan dökülen suyun hacmi $\dfrac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{\sqrt{3}} \cong 1,8$ m^3 olarak bulunur.

Örnek 5

Taban yarıçapı 5 cm ve yüksekliği 25 cm olan silindir şeklindeki sürahi her seferinde tam doldurularak taban yarıçapı 40 cm ve yüksekliği 1 m olan içi boş silindir şeklindeki depoya su doldurulacaktır. Buna göre

a) Kaç sürahi su gerektiğini bulunuz.

b) 10 sürahi su doldurulursa bu deponun içindeki suyun yüksekliğinin kaç cm olacağını bulunuz.

Çözüm

a) Sürahinin hacmi $\pi \cdot 5^2 \cdot 25 = 625\pi$ cm^3 ve deponun hacmi $\pi \cdot 40^2 \cdot 100 = 160000\pi$ cm^3 olduğundan deponun doldurulması için gerekli olan içi tam dolu sürahi sayısı
$\dfrac{\text{Deponun hacmi}}{\text{Sürahinin hacmi}} = \dfrac{160000\cancel{\pi}}{625\cancel{\pi}} = 256$ olur.

b) 10 sürahi su $10 \cdot 625\pi = 6250\pi$ cm^3 hacimdedir. Bu 10 sürahi su kaba dökülünce yüksekliği h cm olsun. Hacim 6250π cm^3 olacağından

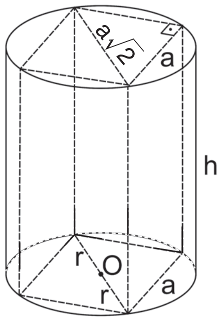
$\pi \cdot 40^2 \cdot h = 6250\pi \Rightarrow 1600 \cdot h = 6250$

$\Rightarrow h \cong 3,9$ cm bulunur.

Örnek 6

Bir silindirin içine en büyük hacimli kare dik prizma yerleştiriliyor. Silindirin içinde boşta kalan kısmın hacminin kare dik prizmanın hacmine oranını bulunuz.

Çözüm



Silindir ile kare dik prizmanın yüksekliğinin aynı olması gerekmektedir. Ayrıca tabandaki karenin köşegen uzunluğu olan $a\sqrt{2}$ silindirin taban çapına eşit olacağından $a\sqrt{2}=2r$ ve buradan $a=\sqrt{2}r$ olur.

Silindirin hacmi $\pi r^2 \cdot h$ ve kare dik prizmanın hacmi $a^2 \cdot h=(\sqrt{2}r)^2 \cdot h = 2r^2h$ olur.

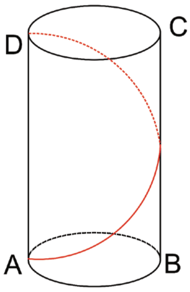
Boşta kalan kısmın hacmi için silindirin hacminden kare dik prizmanın hacmi çıkarılırsa $\pi r^2 \cdot h - 2r^2 \cdot h = r^2h(\pi-2)$ olur. Sonuç olarak istenen oran

$$\frac{\text{Boş kısmın hacmi}}{\text{Kare prizmanın hacmi}} = \frac{r^2h(\pi-2)}{2r^2h} = \frac{\pi-2}{2} \cong 0,57 \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

Kars yöresine ait kaşar peyniri yapan bir usta, taban yarıçapı 24 cm ve yüksekliği 10 cm olan silindir şeklindeki peynir kalıbından yanda verilen şekildeki gibi çeyrek peynir dilimi kesiyor. Kesilen bu parçanın hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz (Peynir içindeki boşluklar önemsenmeyecektir.).

Örnek 7



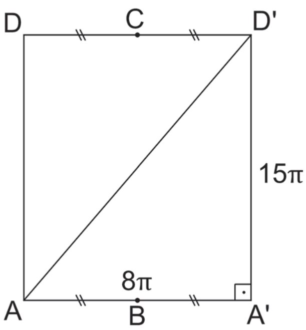
Silindir şeklindeki yakıt deposu ile ilgili olarak aşağıdaki bilgiler veriliyor:

- Deponun taban dairesinin çapı 8 metredir.
- Deponun yüksekliği 15π metredir.
- Depoya A noktasından D noktasına yanda verilen şekildeki gibi bir merdiven yapılmak isteniyor.

Buna göre merdivenin uzunluğunun **en az** kaç metre olacağını bulunuz.

Çözüm

Merdiven uzunluğunun en az olduğu durum, silindirin yanal yüzeyinin aşağıda verilen açınımındaki dikdörtgenin köşegeni olan $[AD']$'nın uzunluğu kadardır.



$|AA'|$ silindirin taban çevresinin uzunluğuna eşit olduğundan $|AA'| = 2\pi r = 2\pi \cdot 4 = 8\pi$ m olur. $|A'D'|$ silindirin yüksekliğine eşit olduğundan $|A'D'| = 15\pi$ m olur.

Bu durumda merdivenin uzunluğu en az

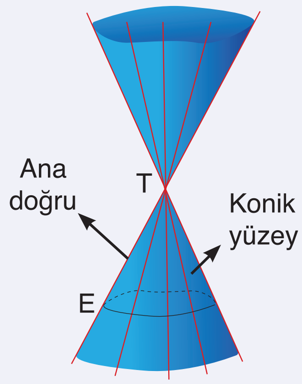
$|AD'|^2 = |AA'|^2 + |A'D'|^2$

$|AD'|^2 = (8\pi)^2 + (15\pi)^2$ $\quad$ $(8k-15k-17k$ dik üçgeni$)$

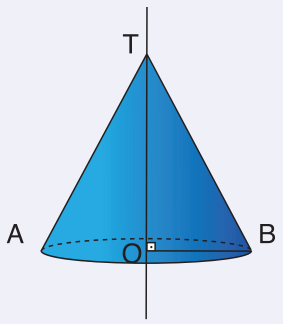
$|AD'| = 17\pi$ m bulunur.

Dik Dairesel Koni

Bilgi



Uzayda kapalı bir E eğrisi ile bu eğrinin düzlemi dışında bir T noktası olsun. T noktasından geçen ve E eğrisini kesen doğruların kümesine **konik yüzey** denir. T noktasına konik yüzeyin **tepe noktası**, konik yüzeyi oluşturan doğruların her birine **konik yüzeyin ana doğrusu** denir. Bir konik yüzeyin sınırladığı bölgeye **koni** denir.



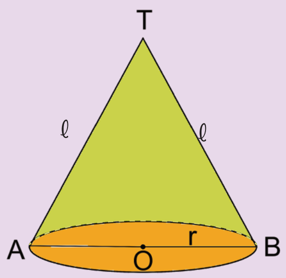
Dik dairesel koni

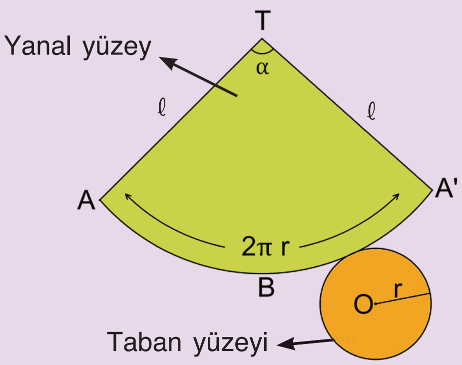
Tabanı daire olan konilere **dairesel koni** ve dairesel koninin tabanının merkezi ile tepe noktasından geçen doğruya **koninin ekseni** denir. Ekseni taban düzlemine dik olan konilere **dik koni**, dik koninin tabanı daire şeklinde ise bu koniye **dik dairesel koni** denir. Taban dairesinin merkezi O noktası olan yandaki dik dairesel koninin ana doğrusu [TA] ve [TB], **yüksekliği** [TO] ve **taban yarıçapı** [OB] olur.

Kitabın bundan sonraki kısmında kolaylık olması için "koni" denildiğinde "dik dairesel koni" anlaşılmalıdır.

Buluyorum

Taban yarıçapı r, ana doğrusu ℓ birim olan bir koninin yüzey alanı aşağıdaki gibi bulunur.





Koni, ana doğrusu [TA] boyunca kesilirse bu koninin yan yüzeyinin bir daire dilimi olduğu görülür. Daire dilimini sınırlayan yay parçasının uç noktaları A ve A′ olsun. Daire diliminin yay uzunluğu taban dairesinin çevre uzunluğuna eşit olup $2\pi r$ kadardır.

$|\overset{\frown}{AA'}| = 2\pi\cdot\ell\cdot\frac{\alpha}{360^\circ} \Rightarrow 2\pi r = 2\pi\ell\cdot\frac{\alpha}{360^\circ} \Rightarrow \frac{r}{\ell} = \frac{\alpha}{360^\circ}$ olur. Daire dilimi olan yanal yüzey alanı Y_A olmak üzere

$Y_A = \pi\ell^2\cdot\frac{\alpha}{360^\circ} = \pi\ell^2\cdot\frac{r}{\ell} = \pi r\ell$ şeklinde bulunur.

Koninin taban alanı T_A, yüzey alanı A olmak üzere

$A = Y_A + T_A = \pi r\ell + \pi r^2 = \pi r(\ell + r)$ şeklinde bulunur.

Örnek 8

Taban yarıçapı 9 cm, yüksekliği 12 cm olan koninin açınımını yaparak

a) Ana doğrusunun uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

b) Açınımdaki daire diliminin merkez açı ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.

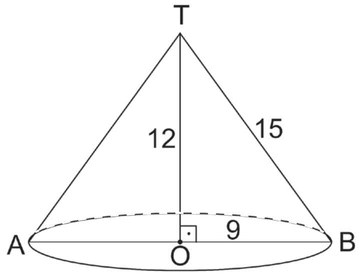
c) Daire dilimini sınırlayan yay parçasının uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

ç) Yanal yüzey alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

d) Tüm yüzey alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

Çözüm

a)



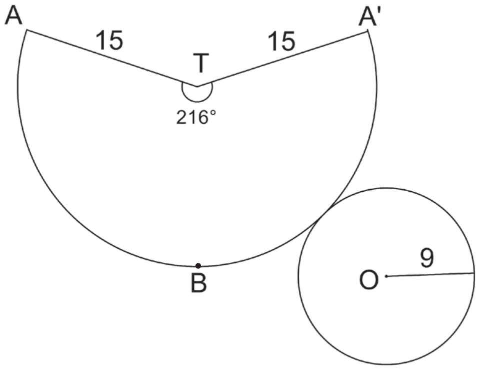
Tepe noktası T olmak üzere verilenlere göre koni yandaki gibi çizilebilir. TOB dik üçgeninde Pisagor teoremiyle

$|TB|^2 = |TO|^2 + |OB|^2 \Rightarrow |TB|^2 = 12^2 + 9^2$

$|TB|^2 = 225$

$|TB| = 15$ cm olur.

b)



Koninin açınımı ise yandaki gibi çizilir.
Yanal yüzeyin açınımı olan daire diliminin merkez açısı α olsun. Bu durumda $r = 9$ cm ve $\ell = 15$ cm olduğundan $\frac{r}{\ell} = \frac{\alpha}{360°} \Rightarrow \frac{9}{15} = \frac{\alpha}{360°} \Rightarrow \alpha = 216°$ olur.

c) Daire dilimini sınırlayan yay parçasının uç noktaları A ve A′ olsun. $|\widehat{ABA'}|$, taban dairesinin çevre uzunluğuna eşit olduğundan $|\widehat{ABA'}| = 2\pi \cdot r = 2\pi \cdot 9 = 18\pi$ cm bulunur.

ç) Yanal yüzey alanı, açınımdaki daire diliminin alanı olduğundan
$Y_A = \pi \cdot r \cdot \ell = \pi \cdot 9 \cdot 15 = 135\pi$ cm^2 elde edilir.

d) Tüm yüzey alanı A olmak üzere $A = T_A + Y_A = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot \ell = \pi \cdot 9^2 + \pi \cdot 9 \cdot 15$

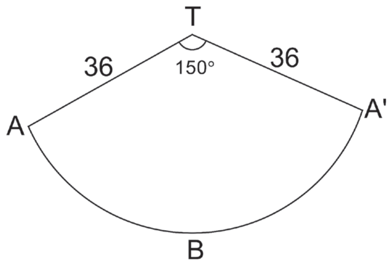
$= 81\pi + 135\pi$

$= 216\pi$ cm^2 bulunur.

Sıra Sizde

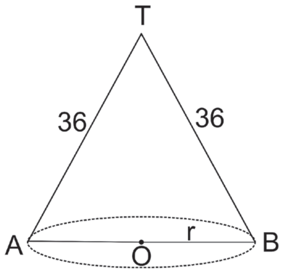
Taban yarıçapı 3 cm, yüksekliği 4 cm olan koninin yanal alanının ve yüzey alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

Örnek 9



Yandaki daire diliminde $|TA| = |TA'| = 36$ cm ve $m(\widehat{ATA'}) = 150^\circ$ olarak verilmiştir. Bu daire dilimi kıvrılarak tabanı açık bir koni elde ediliyor. Bu koninin yüzey alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

Çözüm



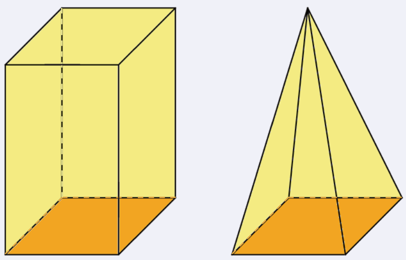
Elde edilen koninin taban yarıçapı r olsun. Buradan

$$\frac{r}{\ell} = \frac{\alpha}{360^\circ} \Rightarrow \frac{r}{36} = \frac{\overset{5}{\cancel{150^\circ}}}{\underset{12}{\cancel{360^\circ}}} \Rightarrow r = 15 \text{ cm olur.}$$

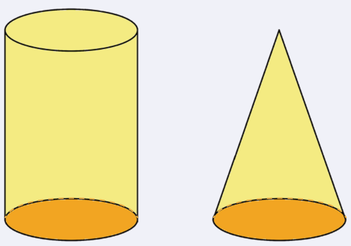
Tabanı açık koninin yüzey alanı, yanal alanına eşit olduğundan

$Y_A = \pi \cdot r \cdot \ell = \pi \cdot 15 \cdot 36 = 540\pi \text{ cm}^2$ bulunur.

Bilgi



Taban alanları ve yükseklikleri aynı olan bir prizma ile piramitin hacimleri arasında $\frac{1}{3}$ oranı olduğunu öğrenmiştiniz.



Prizma ve piramit arasındaki ilişkinin silindir ve koni arasında da olduğu düşünülürse taban alanı ve yüksekliği eşit koninin hacmi, silindirin hacminin $\frac{1}{3}$'ine eşit olur.

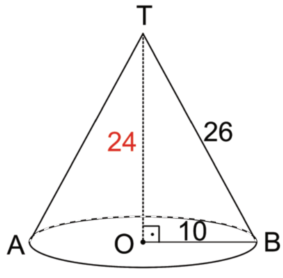
Taban dairesinin yarıçapı r birim ve yüksekliği h birim olan koninin hacmi, taban alanı ile yüksekliğinin çarpımının $\frac{1}{3}$'ine eşittir. Koninin taban alanı T_A ve hacmi V ile gösterilirse koninin hacmi,

$V = \frac{1}{3} T_A \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$ ile bulunur.

Örnek 10

Taban yarıçapı 10 cm ve ana doğrusunun uzunluğu 26 cm olan koninin hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

Çözüm



TOB dik üçgeninde Pisagor teoremi ile

$|TO|^2 + |OB|^2 = |TB|^2 \Rightarrow |TO|^2 + 10^2 = 26^2$

$\Rightarrow |TO|^2 + 100 = 676$

$\Rightarrow |TO|^2 = 576$

$\Rightarrow |TO| = 24$ cm olur.

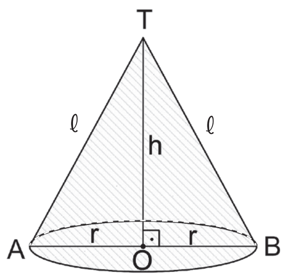
Bu durumda koninin hacmi

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 24 = 800\pi$ cm^3 bulunur.

Örnek 11

Bir koninin ekseninden geçen kesiti eşkenar üçgendir. Bu üçgenin alanı $16\sqrt{3}$ cm^2 olduğuna göre koninin hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

Çözüm



Eksenden geçen TAB eşkenar üçgen olduğundan $\ell = 2r$ olur. Bir kenarı a birim olan eşkenar üçgenin alanı $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ olup $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3} \Rightarrow \ell^2 = 64 \Rightarrow \ell = 8$ cm elde edilir. Bu durumda $\ell = 2r$ ise $8 = 2r$ olup $r = 4$ cm bulunur.

TOB dik üçgeninde Pisagor teoremiyle

$|TO|^2 + |OB|^2 = |TB|^2 \Rightarrow h^2 + r^2 = \ell^2$

$\Rightarrow h^2 + 4^2 = 8^2$

$\Rightarrow h^2 + 16 = 64$

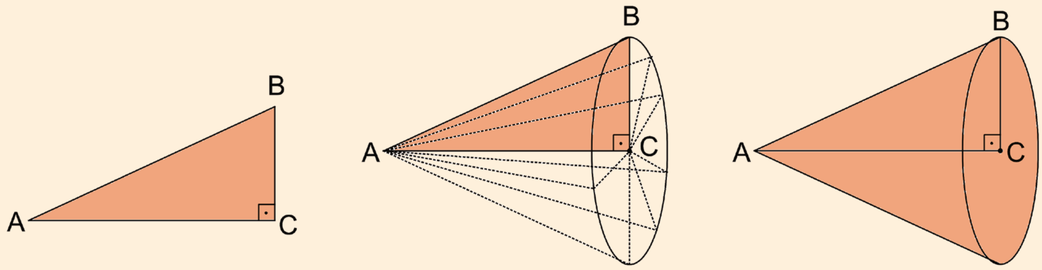
$\Rightarrow h^2 = 48$

$\Rightarrow h = 4\sqrt{3}$ cm olur.

Sonuç olarak koninin hacmi $V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 4\sqrt{3} = \frac{64\sqrt{3}}{3}\pi$ cm^3 bulunur.

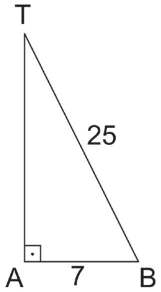
İpucu

Dik üçgen şeklindeki üçgensel bir bölge dik kenarlarından birinin etrafında 360° döndürülürse taradığı bölge bir dik dairesel koni olur. Etrafında döndürülen dik kenar yükseklik, diğer dik kenar ise taban dairesinin yarıçapıdır.



Yukarıdaki şekilde ABC dik üçgeninin $[AC]$ kenarı etrafında 360° döndürüldüğünde taban yarıçapı $[BC]$, yüksekliği $[AC]$ olan koni çizilmiştir.

Örnek 12



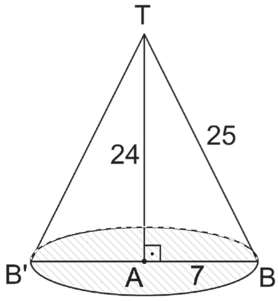
Yandaki şekilde $[TA] \perp [AB]$, $|AB| = 7$ cm ve $|TB| = 25$ cm olmak üzere TAB dik üçgeni veriliyor.

a) $[TA]$ kenarı etrafında 360° döndürüldüğünde taradığı bölgenin hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

b) $[AB]$ kenarı etrafında 360° döndürüldüğünde taradığı bölgenin hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

Çözüm

a)



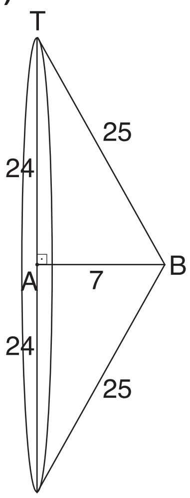
TAB dik üçgeni $[TA]$ kenarı etrafında 360° döndürüldüğünde taradığı bölge, taban yarıçapı $r = 7$ cm ve ana doğru uzunluğu $\ell = 25$ cm olan koni şeklinde bir bölge olur. TAB dik üçgeninde Pisagor teoremiyle

$$\begin{aligned} |TA|^2 + |AB|^2 = |TB|^2 &\Rightarrow |TA|^2 + 7^2 = 25^2 \\ &\Rightarrow |TA|^2 + 49 = 625 \\ &\Rightarrow |TA|^2 = 576 \\ &\Rightarrow |TA| = 24 \text{ cm olur.} \end{aligned}$$

Buradan dik dairesel koninin yüksekliği 24 cm'dir.

Bu durumda koni şeklinde olan bölgenin hacmi $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 7^2 \cdot 24 = 392\pi \text{ cm}^3$ bulunur.

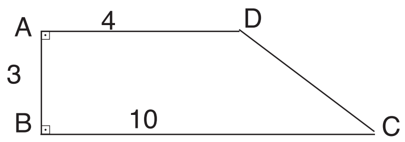
b)



TAB dik üçgeni $[AB]$ kenarı etrafında 360° döndürüldüğünde taradığı bölge, taban yarıçapı $r = 24$ cm ve ana doğru uzunluğu $\ell = 25$ cm olan koni şeklinde bir bölge olur. Koninin yüksekliği ise 7 cm'dir.

Bu durumda koni şeklinde olan bölgenin hacmi, $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 24^2 \cdot 7 = 1344\pi \text{ cm}^3$ olarak bulunur.

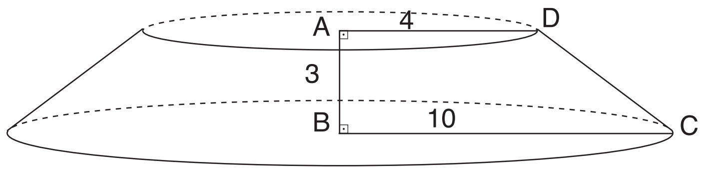
Örnek 13



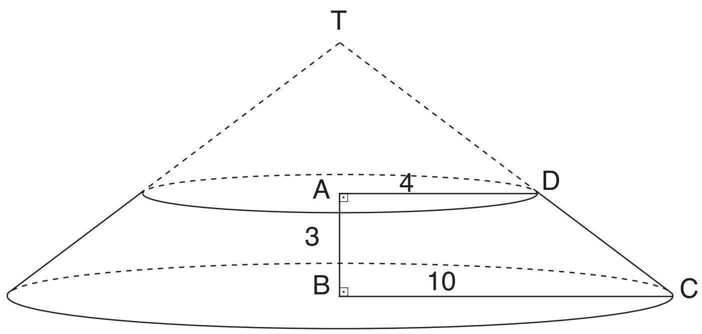
Yanda verilen ABCD dik yamuğu şeklindeki levhada $|AB| = 3$ cm, $|AD| = 4$ cm ve $|BC| = 10$ cm verilmiştir. Bu levha $[AB]$ etrafında 360° döndürüldüğünde taradığı bölgenin hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

Çözüm

Verilen dik koni $[AB]$ etrafında 360° döndürülürse aşağıdaki şekil elde edilir.



Şekil tepe noktası T olan koni olacak şekilde tamamlanırsa aşağıdaki gibi olur.



A.A. benzerliği ile $\overset{\frown}{TAD} \sim \overset{\frown}{TBC}$ olur.

$$\overset{\frown}{TAD} \sim \overset{\frown}{TBC} \Rightarrow \frac{|TA|}{|TB|} = \frac{|AD|}{|BC|} \Rightarrow \frac{|TA|}{|TA|+3} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{5}{\cancel{10}}}$$

$$\Rightarrow 5|TA| = 2|TA| + 6$$

$$\Rightarrow 3|TA| = 6$$

$$\Rightarrow |TA| = 2 \text{ cm olur.}$$

Buradan $|TB| = |TA| + |AB| = 2 + 3 = 5$ cm elde edilir.
Tepe noktası T ve tabanı B merkezli daire olan koniden tepe noktası T ve tabanı A merkezli daire olan koninin hacmi çıkarılırsa kalan şeklin hacmi bulunur. Bu durumda kalan şeklin hacmi V_K olmak üzere

$$V_K = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot |TB| - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot |TA|$$

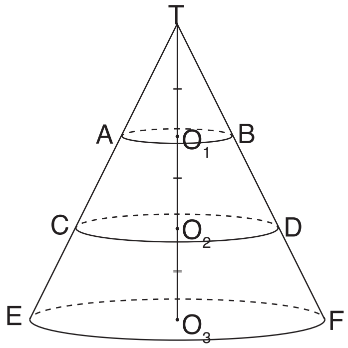
$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 100 \cdot 5 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 16 \cdot 2$$

$$= \frac{500\pi}{3} - \frac{32\pi}{3}$$

$$= \frac{468\pi}{3}$$

$$= 156\pi \text{ cm}^3 \text{ bulunur.}$$

Örnek 14

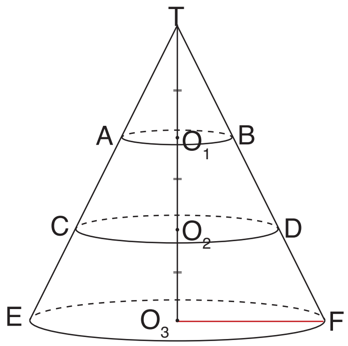


Koni şeklindeki bir pastanın kesilmesiyle ilgili aşağıdaki bilgiler veriliyor.

- Tepe noktası T, taban dairesinin merkezi O_3 tür.
- Bu pasta tabana paralel olacak şekilde O_1 ile O_2 noktalarından geçecek şekilde kesiliyor ve $|TO_1| = |O_1O_2| = |O_2O_3|$ olmak üzere üç parçaya ayrılıyor.
- En alttaki parçanın hacmi ile en üstteki parçanın hacminin toplamı 400 birimküptür.

Buna göre ortadaki parçanın hacminin kaç birimküp olduğunu bulunuz.

Çözüm

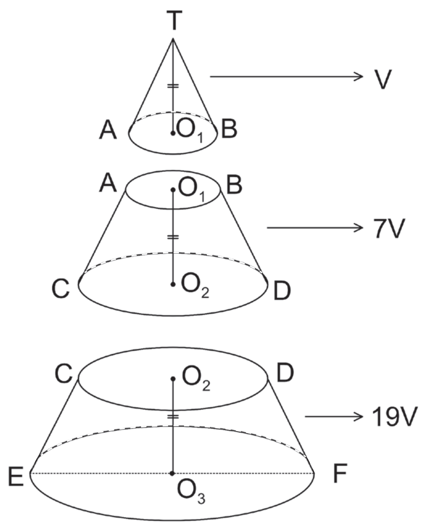


Taban merkezi O_1 olan koninin hacmi V_1 birimküp, O_2 olan koninin hacmi V_2 birimküp ve O_3 olan koninin hacmi V_3 birimküp olsun. O_1 ile B, O_2 ile D ve O_3 ile F noktaları yanda verilen şekildeki gibi birleştirilirse A.A. benzerliğine göre $\widehat{TO_1B}$, $\widehat{TO_2D}$ ve $\widehat{TO_3F}$ benzerdir. Buradan

$\widehat{TO_1B} \sim \widehat{TO_2D} \Rightarrow \dfrac{|TO_1|}{|TO_2|} = k_1 \Rightarrow \dfrac{1}{2} = k_1$ olur.

Benzer iki şeklin hacimleri oranı, benzerlik oranının küpüne eşit olduğundan $\dfrac{V_1}{V_2} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8} \Rightarrow V_1 = V$ ise $V_2 = 8V$ olur. Buradan ortadaki parçanın hacmi $V_2 - V_1 = 8V - V = 7V$ bulunur.

Verilen benzer üçgenlerden $\widehat{TO_1B} \sim \widehat{TO_3F} \Rightarrow \dfrac{|TO_1|}{|TO_3|} = k_2 \Rightarrow \dfrac{1}{3} = k_2$ olur. Benzer iki şeklin hacimleri oranı, benzerlik oranının küpüne eşit olduğundan $\dfrac{V_1}{V_3} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 \Rightarrow V_1 = V$ ise $V_3 = 27V$ olur. Buradan en alttaki parçanın hacmi $V_3 - V_2 = 27V - 8V = 19V$ bulunur.



Bu durumda her bir parçanın hacmi yandaki gibi olur. Üstteki parçanın hacmi V ise ortadaki parçanın hacmi 7V, en alttaki parçanın hacmi 19V olur.

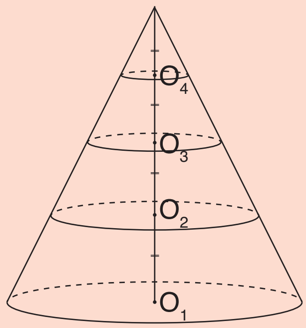
En alttaki parça ile en üstteki parçanın hacimleri toplamı 400 birimküp ise

$V + 19V = 400 \Rightarrow 20V = 400$

$\Rightarrow \quad V = 20$ birimküp olur.

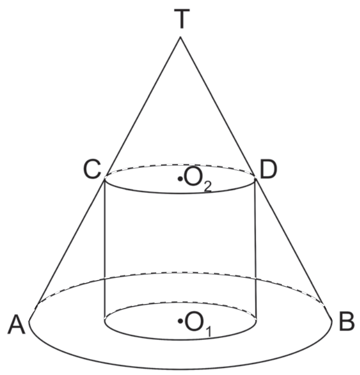
Buradan ortadaki parçanın hacmi $7V = 7 \cdot 20 = 140$ birimküp bulunur.

Sıra Sizde



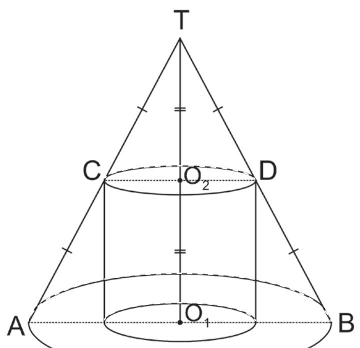
Yanda verilen taban merkezi O_1 olan koni şeklindeki pasta, tabana paralel düzlemlerle O_2, O_3 ve O_4 noktalarından geçecek şekilde eşit yükseklikte dört parçaya ayrılıyor.
En alttan ikinci parçanın hacmi 57 birimküp olduğuna göre en alttaki parçanın hacminin kaç birimküp olduğunu bulunuz.

Örnek 15



Yandaki şekilde verilen koni ile taban merkezleri O_1 ve O_2 olan silindirin taban daireleri aynı merkezlidir. $|TC| = |CA|$ olduğuna göre koninin hacminin silindirin hacmine oranını bulunuz.

Çözüm



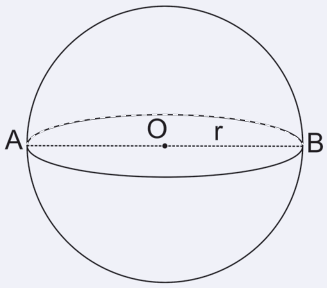
Verilen katı cisimler koni ve silindir olduğundan $|TC| = |CA| = |TD| = |DB|$ elde edilir. Bu durumda $[CD]$, TAB üçgeninin orta tabanı olup $|TO_2| = |O_1O_2|$ olur.

A.A. benzerliği ile $\widehat{TO_2D} \sim \widehat{TO_1B}$ olduğundan $\dfrac{|TO_2|}{|TO_1|} = \dfrac{|O_2D|}{|O_1B|} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{|O_2D|}{|O_1B|}$ olur. Buradan silindirin tabanının yarıçapı r ise koninin tabanının yarıçapı 2r olur. Benzer şekilde silindirin yüksekliği h ise koninin yüksekliği 2h olur.

Sonuç olarak $\dfrac{\text{Koninin hacmi}}{\text{Silindirin hacmi}} = \dfrac{\frac{1}{3} \cdot \pi (2r)^2 \cdot 2h}{\pi \cdot r^2 \cdot h} = \dfrac{\frac{1}{3} \cdot \cancel{\pi} 4 \cancel{r^2} \cdot 2 \cancel{h}}{\cancel{\pi} \cdot \cancel{r^2} \cdot \cancel{h}} = \dfrac{8}{3}$ bulunur.

Küre

Bilgi



Uzayda sabit bir O noktasından eşit uzaklıkta bulunan noktaların birleşim kümesine **küre yüzeyi** ve bu yüzeyle sınırlanan katı cisme **küre** denir.

- Sabit olan O noktasına **kürenin merkezi**, O noktası ile küre yüzeyi arasındaki sabit olan uzunluğa ise **kürenin yarıçap uzunluğu** denir. Yukarıdaki şekilde verilen **kürenin yarıçapı** $[OB]$, yarıçap uzunuğu ise $|OB| = r$ olur.

- Küre yüzeyinin düzlemle olan ara kesiti bir çemberdir. Bu çembere **küre çemberi** denir. Eğer küre çemberi, kürenin merkezinden geçiyorsa buna **kürenin büyük çemberi** denir.

Buluyorum

I II III

Yukarıdaki I numaralı şekilde verilen r yarıçaplı kürenin yüzeyi, oyun hamuru ile 1 mm kalınlıkta kaplanarak II numaralı küre elde ediliyor. II numaralı küre yüzeyindeki oyun hamurunun tamamı yukarıdaki III numaralı şekilde verilen derinliği 1 mm ve yarıçapı r olan dairesel 4 kaba boşluk kalmayacak şekilde aşağıda verilen şekildeki gibi dolduruluyor.

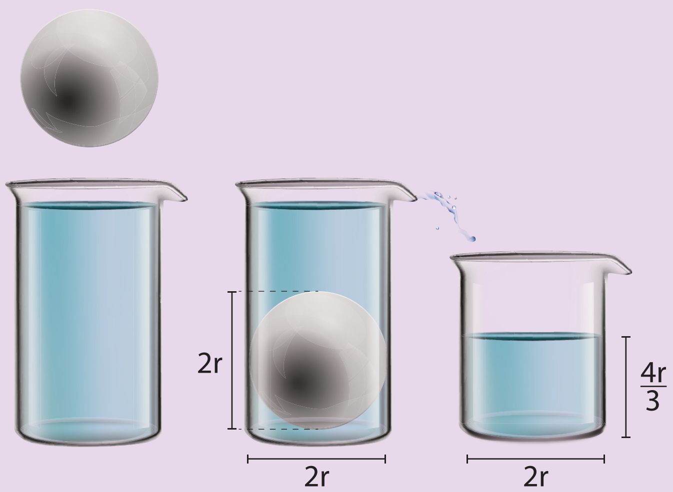
Yapılan bu işlemlerden sonra hiç oyun hamuru artmadığı görülür. Bu durumda bu kaplardaki hamurların yüzey alanları toplamı, küre yüzeyini kaplayan hamurun yüzey alanına eşittir. Buradan küre yüzeyinin alanı $4\pi r^2$ olarak elde edilir.

Bilgi

Merkezi O ve yarıçapı r olan kürenin alanı $4\pi r^2$ dir.

Buluyorum

Taban yarıçapı r birim olan silindir şeklindeki bir kap, tamamen su ile doludur. Ağzı açık bu kabın içine yarıçapı r birim olan küreyi tamamen batırıp taşan suyu yine yarıçapı r birim olan silindir şeklindeki bir kaba doldurduğumuzda su yüksekliğinin $\frac{4r}{3}$ birim olduğu görülür.



Taşan suyun hacmi kürenin hacmine eşit olacağından yarıçapı r birim ve yüksekliği $\frac{4r}{3}$ birim olan silindirin hacmi ile yarıçapı r birim olan kürenin hacmi eşittir. Buradan silindirin hacmi, $\pi r^2 \cdot h = \pi r^2 \cdot \frac{4r}{3} = \frac{4}{3}\pi r^3$ birimküp olarak bulunur.

Sonuç olarak r birim yarıçaplı kürenin hacmi, $\frac{4}{3}\pi r^3$ olur.

Örnek 16

Yarıçapı 6 cm olan kürenin yüzey alanının kaç cm^2 ve hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

Çözüm

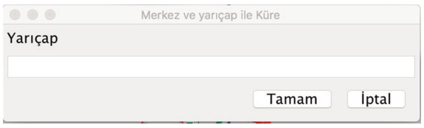
$r = 6$ cm olmak üzere

- Kürenin yüzey alanı $4\pi r^2 = 4 \cdot \pi 6^2 = 144\pi$ cm^2 bulunur.
- Kürenin hacmi $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi 6^3 = 288\pi$ cm^3 bulunur.

Örnek 17

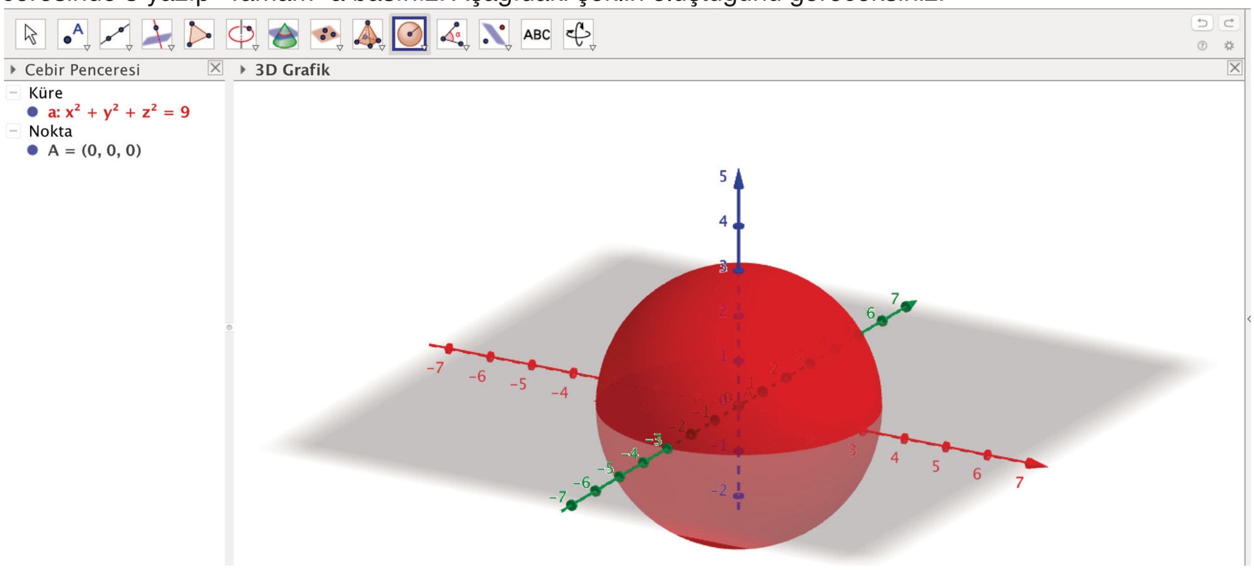
Dinamik matematik yazılımını kullanarak yarıçapı 3 birim olan kürenin hacmini hesaplayınız.

Çözüm

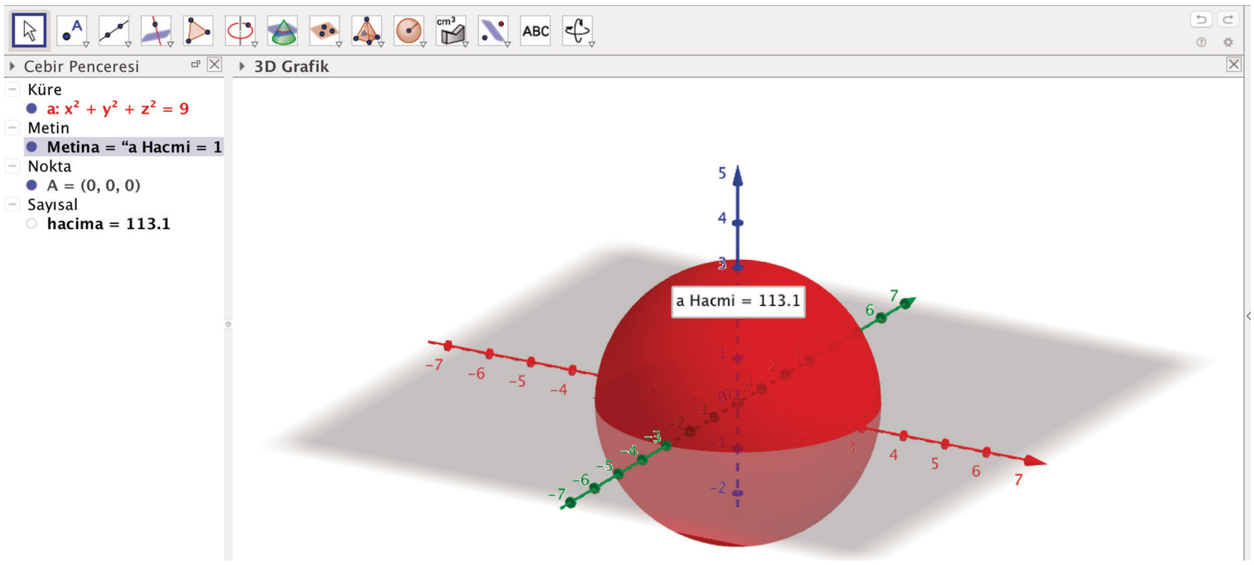


Dinamik matematik yazılımını açarak “Görünüm” menüsünden “3D Grafik” sekmesini seçiniz. Daha sonra araç çubuğundaki 10. kutuya ve ardından açılan “Merkez ve yarıçap ile Küre” sekmesini tıklayınız.

3D Grafik penceresinde oluşan koordinat sisteminde başlangıç noktasına tıklayınız. Açılan “Yarıçap” penceresinde 3 yazıp “Tamam” a basınız. Aşağıdaki şeklin oluştuğunu göreceksiniz.



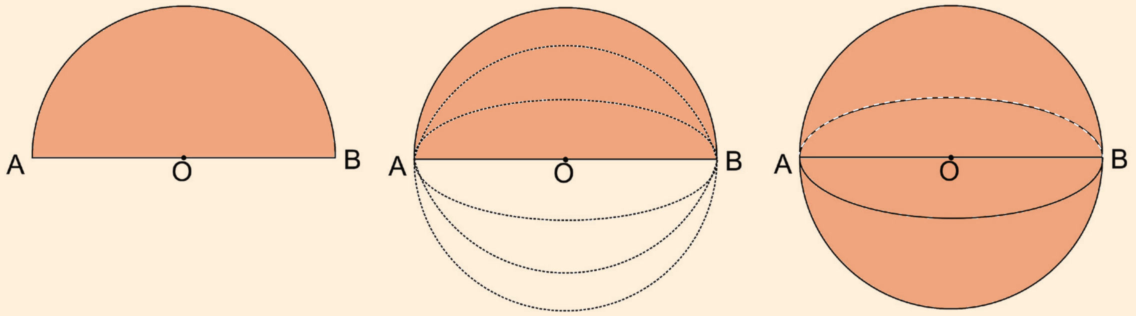
Ardından araç çubuğundaki 11. kutuya ve açılan “Hacim” sekmesine tıklayınız. Daha sonra şekildeki kürenin üzerine tıklandığında cebir penceresinde aşağıda verilen şekildeki gibi “hacima=113.1” yazdığını göreceksiniz.



Yarıçapı $r = 3$ birim olan kürenin hacmi $\frac{4}{3}\pi r^3$ formülü ile hesaplandığında $\frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi$ birimküp olur. Buradan 36π 'nin yaklaşık değerinin 113,1 olduğu görülür.

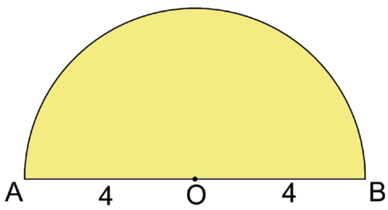
İpucu

Bir yarım daire, çapı etrafında 360° döndürülürse taradığı bölge küre şeklinde olur.



Yukarıdaki şekilde O merkezli, $[AB]$ çaplı yarım daire $[AB]$ etrafında 360° döndürülerek yarıçapı $[OB]$ olan küre çizilmiştir.

Örnek 18



Yandaki şekilde verilen yarım dairede $|AO| = |OB| = 4$ cm olduğuna göre bu yarım daire $[AB]$ etrafında 360° döndürülürse taradığı bölgenin hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

Çözüm

Verilen yarım dairenin çapı $[AB]$'dır. Yarım daire 360° döndürüldüğünde taranan bölge küre şeklinde olur.
Küre şeklindeki bu bölgenin yarıçapı $r = 4$ cm olduğuna göre bu bölgenin hacmi $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 = \frac{256\pi}{3}$ cm^3 bulunur.

Sıra Sizde

Taban dairesinin yarıçapı 6 cm ve ana doğrusu 10 cm olan içi dolu koni şeklindeki bir metal eritilerek küre yapılıyor. Buna göre

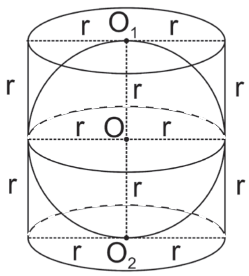
a) Kürenin yüzey alanının kaç cm^2 ve hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

b) Kürenin yarıçapının koninin tabanının yarıçapına oranını bulunuz.

Örnek 19

Bir silindirin içine bırakılan küre, silindirin taban düzlemlerine ve yanal yüzeyine teğettir. Bu kürenin hacmi $288\pi\ cm^3$ olduğuna göre silindirin yanal yüzeyinin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

Çözüm



Küre, silindirin içine şekildeki gibi yerleştirilince kürenin yarıçapı r olmak üzere silindirin taban yarıçapı r ve yüksekliği 2r olur.

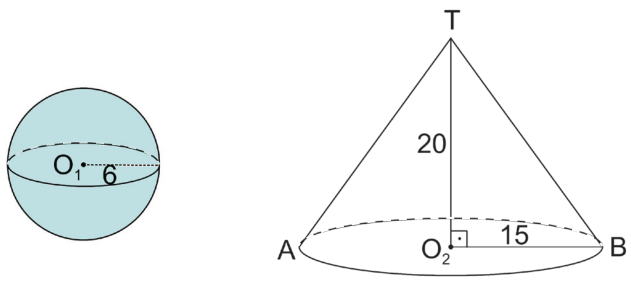
Kürenin hacmi $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow 288\cancel{\pi} = \frac{4}{3}\cancel{\pi} r^3$

$\Rightarrow r^3 = 216$

$\Rightarrow r = 6$ cm elde edilir.

Silindirin yanal alanı $Y_A = 2\pi \cdot r \cdot h = 2\pi \cdot r \cdot 2r = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 6^2 = 144\pi\ cm^2$ bulunur.

Örnek 20



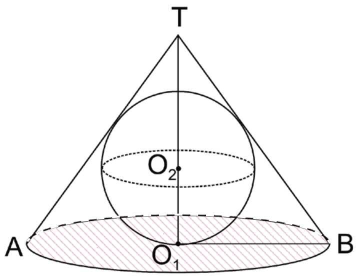
Yukarıdaki şekilde verilen O_1 merkezli ve yarıçapı 6 cm olan küre şeklindeki bir cismin içi su ile doludur. Bu kürenin içindeki su, şekilde verilen taban dairesinin merkezi O_2, yarıçapı 15 cm ve yüksekliği 20 cm olan koni şeklindeki bir kabın içine dökülürse koninin boş kısmının hacminin dolu kısmının hacmine oranını bulunuz.

Çözüm

Kürenin içindeki suyun hacmi $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6^3 = 288\pi\ cm^3$, koninin hacmi $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 15^2 \cdot 20 = 1500\pi\ cm^3$ olur. Bu durumda koninin boş kısmı $1500\pi - 288\pi = 1212\pi\ cm^3$ olur.

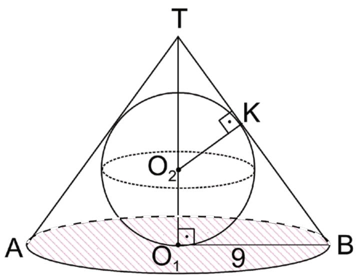
Buradan istenen oran $\frac{1212\pi}{288\pi} = \frac{101}{24}$ olarak bulunur.

Örnek 21



Yandaki şekilde taban dairesinin merkezi O_1, yüksekliği 12 cm olan koninin içine O_2 merkezli küre yerleştirilmiştir. Küre, koninin tabanına ve yüzeyine teğettir. Ana doğruları $[TA]$ ve $[TB]$ olan koninin taban yarıçapı 9 cm olduğuna göre kürenin yüzey alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

Çözüm



- TO_1B dik üçgeninde 3k - 4k - 5k dik üçgeni yardımıyla $|TB| = 15$ cm olur.
- $[O_2K]$ çizilirse $|O_2K| = |O_2O_1| = r$ olmak üzere $|TO_2| = |TO_1| - |O_1O_2| = 12 - r$ elde edilir.
- A.A. benzerliği ile $\widehat{TKO_2} \sim \widehat{TO_1B}$ olur.

Buradan $\dfrac{|TO_2|}{|TB|} = \dfrac{|KO_2|}{|O_1B|} \Rightarrow \dfrac{12-r}{\underset{5}{\cancel{15}}} = \dfrac{r}{\underset{3}{\cancel{9}}}$

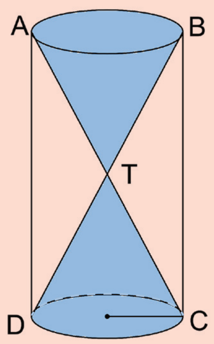
$\Rightarrow 5r = 36 - 3r$

$\Rightarrow 8r = 36$

$\Rightarrow r = \dfrac{9}{2}$ elde edilir.

Buradan kürenin yüzey alanı $4\pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot \left(\dfrac{9}{2}\right)^2 = 4 \cdot \pi \cdot \dfrac{81}{4} = 81\pi$ cm^2 bulunur.

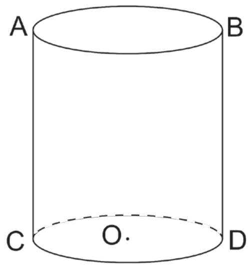
Sıra Sizde



Taban yarıçapı 3 cm olan silindir içerisine taban yarıçapları 3 cm olan iki eş dik koni yanda verilen şekildeki gibi tepe noktaları uç uca gelecek şekilde yerleştirilmiştir. Konilerin tabanları ile silindirin tabanları çakışıktır. Silindirin yüksekliği 12 cm olduğuna göre silindir ile koniler arasında kalan bölgenin hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

ALIŞTIRMALAR

1. Taban yarıçapı 6 cm ve yanal yüzeyinin alanı $72\pi \text{ cm}^2$ olan koninin ana doğrusunun yüksekliğine oranını bulunuz.

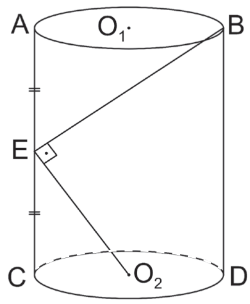
2. 

Şekilde temsili olarak verilen taban dairesinin yarıçapı 12 m ve yüksekliği 16π m olan silindir biçimindeki bir binanın dış yüzeyine C noktasından B noktasına kadar yangın merdiveni yapılacaktır. Merdivenin yapılacağı yer çizgi çizilerek işaretleniyor. Buna göre çizginin uzunluğunun **en az** kaç metre olabileceğini bulunuz.

3. 

Yukarıdaki şekilde verilen masa üç parça silindirden oluşmuştur. Alt ve üstteki silindirlerin yükseklikleri ikişer cm olup taban yarıçapları sırasıyla 15 cm ve 30 cm'dir. Orta bölümdeki silindirin taban yarıçapı 3 cm ve yüksekliği 60 cm'dir. Buna göre masanın tüm yüzeyinin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

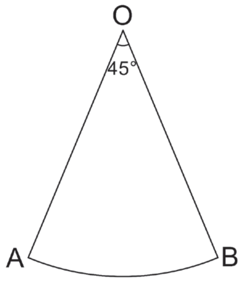
4. Bir küp içine en büyük hacimli küre yerleştiriliyor. Buna göre küpün hacminin kürenin hacmine oranınıbulunuz (Yüzey kalınlıkları dikkate alınmayacaktır.).

5. 

Taban dairelerinin merkezleri O_1 ve O_2 olan yukarıdaki silindirde $|AE| = |EC|$, $|EO_2| = 4\sqrt{3}$ cm ve $[EB] \perp [EO_2]$ veriliyor. Buna göre silindirin taban dairesinin yarıçapının kaç cm olduğunu bulunuz.

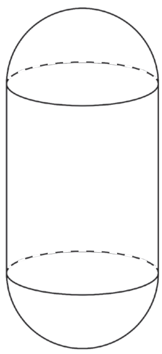
6. Yarıçapı 1 cm olan küre şeklindeki bir metalin yüzeyi altın ile kaplanarak 250 Türk lirasına satıldığına göre yarıçapı 2 cm olan başka bir metal kürenin yüzeyinin altın kaplanınca kaç Türk lirasına satılacağını bulunuz (Metal kürelerin fiyatları ve kaplamalarının kalınlıkları önemsenmeyecektir.).

7.



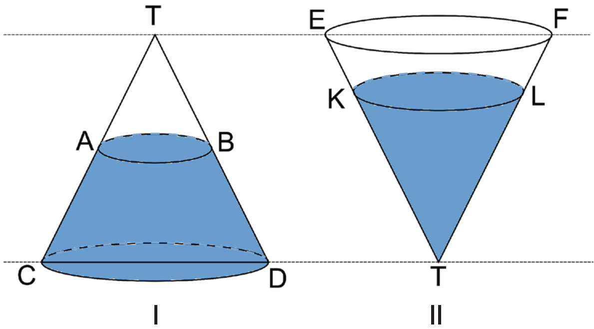
Yukarıdaki şekilde merkez açısının ölçüsü $m(\widehat{AOB}) = 45°$ olan daire dilimi verilmiştir. Bu daire dilimi koni hâline getirildiğinde koninin yüksekliği $3\sqrt{7}$ cm oluyor. Buna göre koninin yüzey alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

8.



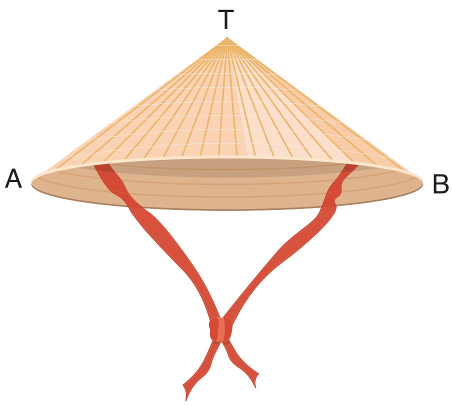
Yukarıdaki şekilde verilen silindir biçimindeki kabın alt ve üst tabanları, yarım küre şeklindeki kapaklarla kapatılmıştır. Cismin hacmi 81π cm^3 ve silindirin taban yarıçapı 3 cm olduğuna göre bu cismin tüm yüzey alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

9.



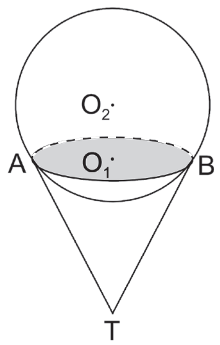
Yukarıdaki şekilde içinde bir miktar su bulunan ve tabanı yer düzlemine paralel olan I numaralı konumda verilen koni ters çevrilerek tabanı yer düzlemine paralel olan II numaralı konuma getirilmiştir. $|TA| = |AC|$ olduğuna göre $\frac{|FT|}{|LT|}$ oranını bulunuz.

10.



Yukarıdaki şekilde verilen şapkanın taban dairesinin çap uçları A ve B olmak üzere taban yarıçapı 15 cm ve ana doğrusunun uzunluğu 45 cm'dir. A noktasından B noktasına şapkanın yüzeyi üzerinden süs amaçlı ince bir şerit çekilecektir. Bu şeridin uzunluğunun **en az** kaç cm olacağını bulunuz (Şeridin kalınlığı dikkate alınmayacaktır.).

11.

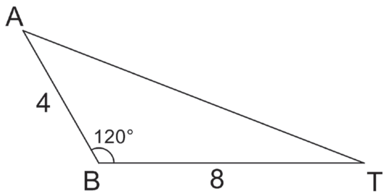


Ağzı açık bir koni ile küre yukarıdaki şekildeki gibi birleştiriliyor. Koninin taban çemberinin merkezi O_1 ve kürenin merkezi O_2 olmak üzere $|O_1B| = 12$ cm ve kürenin yarıçapı 13 cm'dir. Koninin ana doğrusu 20 cm olduğuna göre $|TO_2|$'nun kaç cm olduğunu bulunuz.

12. $\frac{-x}{a} + \frac{y}{2} = 1$ denkleminin belirttiği doğru ve x ekseni ile y ekseninin sınırladığı bölgenin x ekseni etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi 4π birimküptür. Bu bölge y ekseni etrafında 360° döndürüldüğünde oluşan cismin hacminin kaç birimküp olduğunu bulunuz.

13. Ana doğrusunun uzunluğu 24 cm olan koninin içine yerleştirilen küre, koninin tabanına ve yanal yüzlerine teğettir. Koninin tepe noktasının kürenin merkezine uzaklığı 12 cm olduğuna göre kürenin çapının kaç cm olduğunu bulunuz.

14.



Yukarıda verilen ABT üçgeni şeklindeki levha $[BT]$ kenarı etrafında 360° döndürülüyor. $|AB| = 4$ cm, $|BT| = 8$ cm ve $m(\widehat{ABT}) = 120^\circ$ olduğuna göre bu üçgenin taradığı bölgenin hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

15. Yarıçapı r cm olan kürenin hacmi, taban yarıçapı r cm ve yüksekliği h cm olan silindirin hacmine eşittir. Buna göre silindirin yüksekliğinin taban yarıçapına oranını bulunuz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

A) Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerlere doğru ifadeyi yazınız.

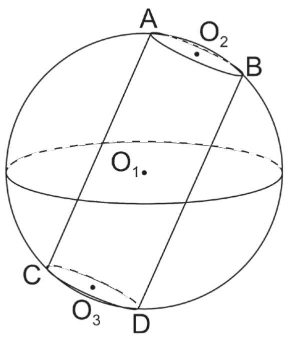
1. Bir silindirik yüzey ile ana doğruları kesen paralel iki düzlemin sınırladığı katı cisme .... denir.

2. Ana doğruları taban düzlemine dik olan ve tabanı daire olan silindirlere .... denir.

3. Kürenin düzlemle olan ara kesiti bir .... olur.

B) Aşağıdaki açık uçlu soruların doğru cevabını bulunuz

4.



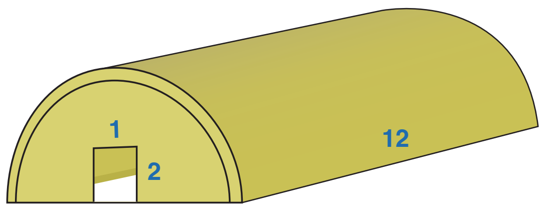
O_1 merkezli, 25 cm yarıçaplı olan kürenin içine şekildeki gibi taban dairesinin çapları $[AB]$ ile $[CD]$ ve yüksekliği 40 cm olan silindir yerleştiriliyor. A, B, C, D küre yüzeyindeki noktalar olduğuna göre silindirin hacminin kürenin hacmine oranını bulunuz.

5.

Tarım ve Orman Bakanlığı ile Milli Eğitim Bakanlığının ortak yürüttüğü bir projede öğrencilerin sağlıklı beslenmesi için ve öğrencileri süt içmeye teşvik etmek amacıyla ücretsiz süt dağıtılmaktadır.

Dağıtılacak süt, orta kısmı silindir yüzeyi şeklinde olan yukarıda verilen şekildeki gibi cam şişelere doldurulmuştur. Bu şişelerin silindirik kısmına "SÜT İÇ SAĞLIKLI YAŞA" sloganı içeren ve eni 6 cm olan dikdörtgen şeklindeki etiketler uç uca gelecek şekilde yapıştırılacaktır.
Şişenin silindirik kısmının yarıçapı 3 cm'dir.
Buna göre bir ilköğretim okulundaki öğrencilere dağıtılacak olan 400 şişeye yapıştırılacak etiketlerin alanları toplamının kaç π cm^2 olduğunu bulunuz.

6.

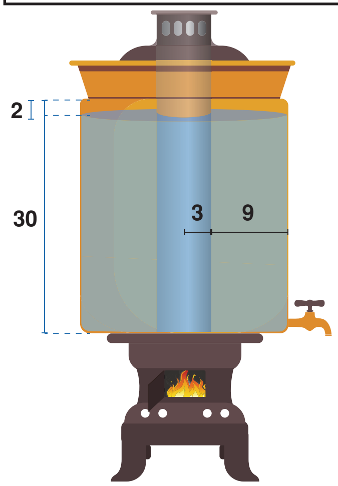


Kızılay, bir afet bölgesine yarım silindir şeklinde çadırlar kuracaktır. Bu çadırlarla ilgili aşağıdaki bilgiler veriliyor.

- Çadırın uzunluğu 12 metre olacaktır.
- Çadırın hacmi 288 metreküp olacaktır.
- Çadırın giriş bölümünde eni 1m, boyu 2m olan dikdörtgen şeklinde bir kapı olacaktır.
- Kapı ve çadırın tabanı hariç çadırın tüm yüzeyi tente ile kaplanacaktır.

Buna göre tentenin metrekare fiyatı 20 Türk lirası olduğuna göre bir çadırın kurulması için gerekli olan tentenin kaç Türk lirası olduğunu bulunuz($\pi = 3$ alınız).

7 - 9. soruları aşağıda verilen bilgilere göre cevaplandırınız.



Yukarıdaki şekilde verilen semaverle ilgili aşağıdaki bilgiler veriliyor.

- Semaverin su haznesi, silindir şeklinde olup yüksekliği 30 cm'dir.
- Su haznesinin taban yarıçapı, 12 cm ve içindeki silindir şeklindeki bacanın yarıçapı, 3 cm'dir.
- Su haznesinin içinde 2 cm yüksekliğinde boşluk vardır.

Bir grup öğrenci, arkadaşlıklarını pekiştirmek için gittikleri piknikte aşağıda verilen bilgilere göre bu semaverdeki suyu kullanmışlardır.

- Piknikteki herkes, 3 cm yarıçaplı silindir şeklindeki bardaklarına 5 cm yüksekliğine kadar su doldurarak çay içmiştir.
- Herkes dörder bardak çay içmiş ve semaverdeki suyun tamamı kullanılmıştır.

(Yeteri kadar dem olduğu düşünülüp suyun buharlaşması önemsenmeyecektir.) Buna göre

7. Pikniğe giden öğrenci sayısını bulunuz.

8. İçilen çayın toplam maliyeti 21 TL olduğuna göre bir bardak çayın maliyetinin kaç kuruş olduğunu bulunuz.

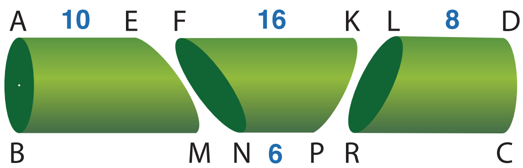
9. n tane öğrenci çay içmeseydi diğer öğrencilere altışar bardak çay düşecekti. Buna göre n'nin kaç olduğunu bulunuz.

C) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruların doğru seçeneğini işaretleyiniz.

10. Yay uzunluğu 6π cm olan bir daire dilimi, kıvrılarak tabanı açık olan koni oluşturuluyor. Bu koninin yüksekliği 6 cm olduğuna göre yanal alanı kaç cm^2 dir?

A) $9\sqrt{5}\pi$ B) $9\sqrt{3}\pi$ C) 9π D) $9\sqrt{5}$ E) $9\sqrt{3}$

11.



Yarıçapı 6 cm olan bir silindir, düzlem şeklinde bir cisimle iki farklı yerinden şekildeki gibi kesiliyor.

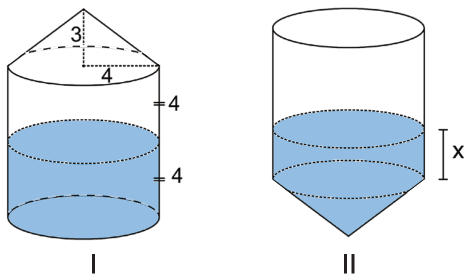
$|AE| = 10$ cm, $|FK| = 16$ cm, $|LD| = 8$ cm ve $|NP| = 6$ cm olduğuna göre ortadaki parça atıldığında kalan cisimlerin hacimleri toplamı kaç cm^3 olur?

A) 588π B) 628π C) 864π D) 828π E) 1008π

12. Silindir şeklindeki plastik bir borunun iç yüzeyine ait taban yarıçapı 6 cm ve dış yüzeyine ait taban yarıçapı 10 cm'dir. Bu borunun plastik kısmının kapladığı hacim $7680\pi\ cm^3$ olduğuna göre borunun uzunluğu kaç cm'dir?

A) 165 B) 142 C)120 D)116 E) 108

13.



Yukarıdaki şekilde verilen kap taban yarıçapı 4 cm ve yüksekliği 8 cm olan silindir, taban yarıçapı 4 cm ve yüksekliği 3 cm olan koniden oluşmuştur. I numaralı şekilde kabın içinde 4 cm yüksekliğinde su bulunmaktadır.
Kap II numaralı konuma getirilirse suyun silindir içindeki yüksekliği olarak verilen x kaç cm olur?

A) $\frac{3}{4}$ B) 1 C) $\frac{4}{3}$ D) 3 E) $\frac{16}{3}$

14. Çapı $4\sqrt{3}$ cm olan bir kürenin içine yerleştirilebilecek en büyük hacimli küpün yüzey alanı kaç cm^2 dir?

A) 96 B) 84 C) 72 D) 64 E) 48

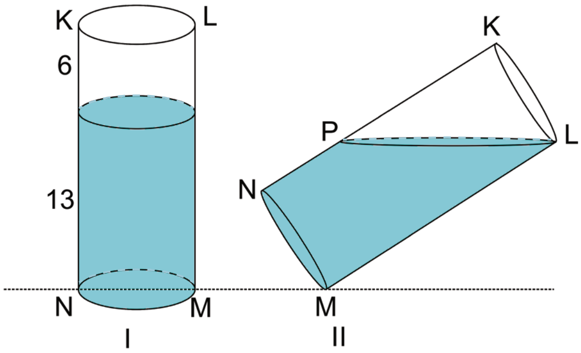
15. Yarıçapı 17 cm olan bir kürenin içine yüksekliği 16 cm olan en büyük hacimli silindir yerleştirilmiştir. Buna göre silindirin alanı kaç cm^2 dir?

A) 860π B) 890π C) 900π D) 916π E) 930π

16. Yarıçapı 6 m olan yarım küre yüzeyi şeklindeki bir cami kubbesinin dışı bakır levhalar ile kaplanacaktır. Bakır levhanın m^2 fiyatı 100 Türk lirası olduğuna göre kubbenin tabanı hariç dış yüzeyine kaplanacak malzemenin toplam fiyatı kaç Türk lirasıdır ($\pi = 3$ alınız.)?

A) 21 600 B) 24 800 C) 28 800 D) 31 200 E) 43 200

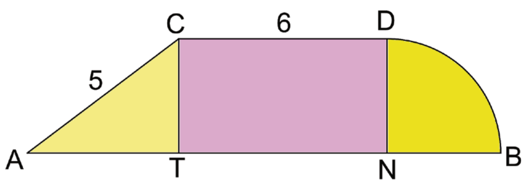
17.



19 cm yüksekliğinde olan silindir şeklindeki kapta 13 cm yüksekliğinde su vardır. Kabın içindeki su dökülmeyecek şekilde silindir I numaralı konumdan II numaralı konuma getirildiğinde $|NP|$ kaç cm olur?

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

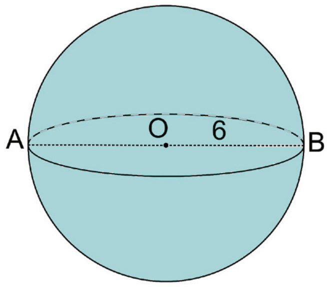
18.



Yukarıdaki şekilde A, T, N, B noktaları doğrusaldır. ACT üçgeni, CDNT dikdörtgeni ve N merkezli, $[DN]$ yarıçaplı çeyrek daire verilmiştir. $|CT| < |AT|$, $|AC| = 5$ cm, $|CD| = 6$ cm ve $|AB| = 13$ cm olup şekil $[AB]$ etrafında $360°$ döndürüldüğünde şeklin taradığı bölgenin hacmi kaç π cm^3 olur?

A) 52 B) 84 C) 86 D) 92 E) 102

19.



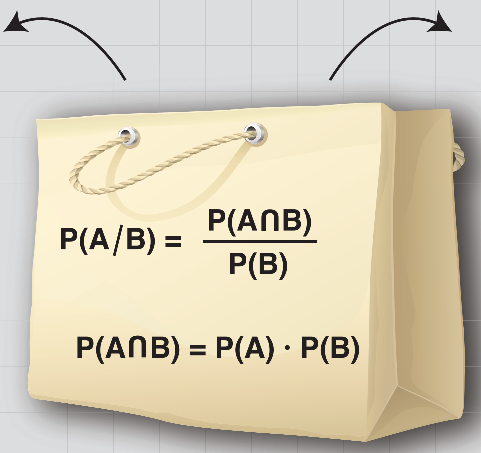
Yukarıda verilen ve yarıçapı 6 cm olan kürenin içi tamamen su ile doludur. Bu suyun tamamı taban dairesinin yarıçapı 1 cm ve yüksekliği 9 cm olan silindir şeklindeki ve taban dairesinin yarıçapı 1 cm ve yüksekliği 9 cm olan koni şeklindeki kapların içine doldurulacaktır. Koni ve silindir şeklindeki kapların her birinden en az bir kez kullanılacağına göre **en çok** kaç adet kap gerekmektedir?

A) 83 B) 89 C) 94 D) 98 E) 101

DEĞERLENDİRME

Cevaplarınızı cevap anahtarı ile karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorularla ilgili konuları veya faaliyetleri geri dönerek tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.

VERİ, SAYMA VE OLASILIK



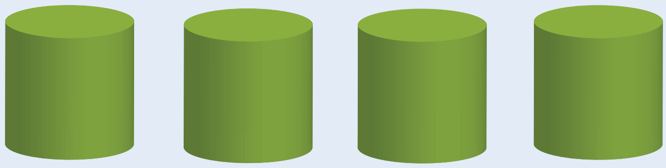
7

Olasılık

- 11.7.1. Koşullu Olasılık
- 11.7.2. Deneysel ve Teorik Olasılık

11.7. OLASILIK

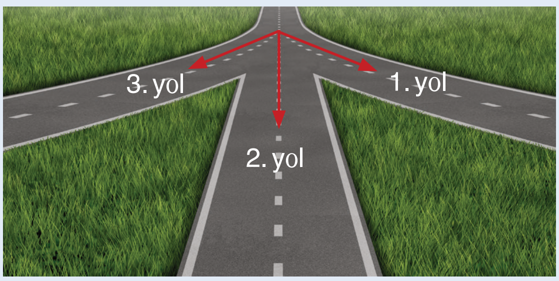
Hazırlık Çalışması

1. 

Kızı Begüm ile oyun oynamayı ve vakit geçirmeyi çok seven Engin Bey, yukarıdaki görselde verilen kapları kullanarak kızıyla oyun oynuyor. Engin Bey, bu kaplardan yalnız birine bir bilye koyarak kapları hızlıca karıştırıyor ve Begüm'den bilyenin olduğu kabı tahmin etmesini istiyor. Begüm, bilyenin bulunduğu kabı takip ederken bir kapta kesinlikle bilye olmadığını fark ediyor. Buna göre rastgele bir tercih yaptığında Begüm'ün bilyenin olduğu kabı seçme olasılığını bulunuz.

2. Yanlış cevaplanan soruların doğru cevaplanan soruları götürmediği ve her biri 5 seçenekli sorulardan oluşan bir sınava giren Bilge ve Ayşe'nin sınavın üçüncü sorusuna verdiği cevaplarla ilgili bilgiler aşağıdaki gibidir:
   - Bilge A, B, C şıklarının doğru cevap olmadığını biliyor ve kalan şıklardan herhangi birini rastgele seçip işaretliyor.
   - Ayşe A ve C şıklarının doğru cevap olmadığını biliyor ve kalan şıklardan herhangi birini rastgele seçip işaretliyor.

Verilen bilgilere göre Ayşe'nin doğru cevabı işaretlemiş olma olasılığı ile Bilge'nin doğru cevabı işaretlemiş olma olasılığını bulup iki olasılıktan hangisinin daha büyük olduğunu bulunuz.

3. 

Birbirleri ile çok iyi dost olan iki aile hafta sonu için pikniğe gitmeyi planlıyor. Piknik günü Gül ailesi, Cengiz ailesinden önce yola çıkarak malzemeleri götürüyor. Piknik alanına üç farklı yoldan gidilebilmesine rağmen bu yollardan ikisinde yol çalışması yapılmaktadır. Gül ailesi birinci yoldan gitmeyi tercih etmiş bir müddet sonra yolun kapalı olduğunu görüp Cengiz ailesini arayarak bilgilendirmiştir.

Buna göre Cengiz ailesi rastgele bir yol seçip gittiğinde bu yolun açık yol olma olasılığını bulunuz.


İnsanın hayatı boyunca yaptığı tercihler hayatını olumlu ya da olumsuz yönde etkiler. Örneğin kişinin meslek seçimi yaparken öncelikle kendi beceri ve yeteneklerini göz önünde bulundurup buna uygun bir seçim yapması ilerideki meslek hayatında başarılı olma olasılığını artıracaktır.

Bilgi insanlık tarihinin en değerli olgularından biridir. İnsanın her faaliyetinde bu faaliyet ile ilgili doğru ön bilgiye sahip olması bu faaliyetin sonuçlarını olumlu yönde etkileyecektir. Örneğin arıza yapan bir araç tamirciye götürüldüğünde araçla ilgilenenen usta, arızanın aracın hangi bölgesinde olduğunu bilgi ve tecrübesiyle belirler. Böylece olası durumlarla ilgili seçenekleri azaltarak arıza tespiti yapar ve tamire başlar. Bu sayede hem zamandan hem de iş gücünden tasarruf etmiş olur.

11.7.1. Koşullu Olasılık

Terimler ve Kavramlar

- Koşullu Olasılık
- Bağımlı Olay
- Bağımsız Olay
- Bileşik Olay

Sembol ve Gösterimler

- $P(A / B)$
- $P(A \cap B)$
- $P(A \cup B)$

Neler Öğreneceksiniz?

- Koşullu olasılığı açıklayarak problem çözmeyi,
- Bağımlı ve bağımsız olayları açıklayarak gerçekleşme olasılıklarını hesaplamayı,
- Bileşik olayı açıklayarak gerçekleşme olasılıklarını hesaplamayı öğreneceksiniz.

11.7.1.1. Koşullu Olasılık

Olasılık Kuramının Tarihsel Gelişimi

Blaise Pascal (Bileyz Paskal) (Temsilî)

1654'de, Pascal Konikler' iyle uğraşırken, arkadaşı Chevalier de Mere onunla şöyle soruları paylaşıyordu: Bir oyuncu bir zarı sekiz kez atarak bir yakalamak istiyor ama üç başarısız atıştan sonra oyun kesiliyor. Oyuncunun zararı nasıl karşılanır? Pascal bu konuyu Fermat'a yazmış, aralarındaki yazışma sonucunda modern olasılık teorisinin temelleri atılmıştır. Bu arada bir yüzyıl kadar önce Cardan'ın ortaya attığı görüşlerin göz ardı edildiğini belirtmemiz gerekir. Ne Pascal, ne de Fermat bu bağlamda ulaştıkları sonuçları yayımlatmışlardır; 1657 de Huygens, bu Fransız matematikçilerinin yazışmalarını topladığı De ratiociniis in ludo aleae (Zar Oyunlarının Mantığı) adlı küçük bir kitap çıkartmıştır.

Bu arada Pascal olasılık tartışmalarını Cardan'ın ulaştırdığı noktadan ötelere taşıyarak aritmetik üçgenle ilişkilendirmiş, bu üçgen düzenlemesi de o zamandan beri Pascal'in adıyla anılır olmuştur. (...)

(Kısaltılmıştır.)

(Alıntı metin, aslına sadık kalınarak alınmış olup herhangi bir yazım ve noktalama değişikliği yapılmamıştır.)

Carl B. BOYER, *Matematiğin Tarihi*

Bilgi

A ile B olayları E örnek uzayının iki olayı olsun.
A olayının gerçekleşmesi B olayına bağlı ise A'nın B koşulu altındaki olma olasılığına **koşullu olasılık** denir ve P(A / B) ile gösterilir.

- $P(B) > 0$ olmak üzere $P(A / B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ olur.
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B / A)$ eşitliğine olasılıkta **çarpma kuralı** denir.

Örnek 1

İki hilesiz zarın atılması deneyinde üst yüze gelen sayılar toplamının 8 olduğu biliniyorsa zarların üst yüzündeki sayıların çarpımının tek sayı olma olasılığını bulunuz.

Çözüm

İki hilesiz zarın atılması deneyinde örnek uzay $6^2 = 36$ elemanlıdır. Üst yüze gelen sayıların toplamının 8 olma olayı B, üst yüze gelen sayıların çarpımının tek sayı olma olayı A olsun.

Buradan $B = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$ ve $s(B) = 5$ olup $P(B) = \dfrac{5}{36}$ olur.

$A = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$ olur.

$A \cap B = \{(3, 5), (5, 3)\}$ ve $s(A \cap B) = 2$ olup $P(A \cap B) = \dfrac{2}{36}$ olur. Bu durumda B olayının gerçekleşmesi durumunda buna bağlı olarak A olayının gerçekleşme olasılığı $P(A / B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \dfrac{2}{5}$ bulunur.

Sıra Sizde

İki hilesiz zarın atılması deneyinde üst yüze gelen sayılar çarpımının 19'dan büyük olduğu biliniyorsa zarların üst yüzündeki sayıların toplamının 10 olma olasılığını bulunuz.

Örnek 2

Üç hilesiz madenî paranın atılması deneyinde atılan paralardan ikisinin yazı geldiği biliniyorsa üçünün de yazı gelme olasılığını bulunuz.

Çözüm

Üç hilesiz madenî paranın atılması deneyinde örnek uzayın eleman sayısı $2^3 = 8$ olur. Bu paralardan ikisinin yazı gelmesi olayı B olsun. Buradan $B = \{(Y, Y, Y), (Y, Y, T), (Y, T, Y), (T, Y, Y)\}$ olup $s(B) = 4$ ve $P(B) = \frac{4}{8}$ olur. Paralardan üçünün de yazı gelme olayı A olsun. Buradan $A = \{(Y, Y, Y)\}$ olup $A \cap B = \{(Y, Y, Y)\}$ olur. Dolayısıyla $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$ olup $P(A \,/\, B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{4}{8}} = \frac{1}{4}$ bulunur.

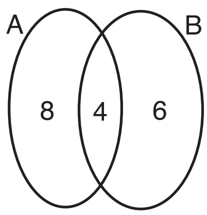
Örnek 3

18 kişilik bir sınıftaki tüm öğrenciler, okullarının düzenlediği bir sosyal etkinlik kapsamında farklı günlerde tiyatroya veya sinemaya gitmişlerdir. Bu öğrencilerden tiyatroya giden 12 kişi, sinemaya giden 10 kişi varsa sinemaya giden bir öğrencinin tiyatroya da gitmiş olma olasılığını bulunuz.

Çözüm

Sinemaya gitme olayı B, tiyatroya gitme olayı ise A olsun. Bu durumda A'nın B'ye bağlı koşullu olasılığı istenmektedir ve bu durum $P(A|B)$ ile gösterilir.

$$s(E) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$$
$$18 = 12 + 10 - s(A \cap B)$$
$$\Rightarrow s(A \cap B) = 4 \text{ olur.}$$



$$P(A \,/\, B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{s(A \cap B)}{s(E)}}{\frac{s(B)}{s(E)}} = \frac{\frac{4}{18}}{\frac{10}{18}} = \frac{2}{5} \text{ olur.}$$

Sıra Sizde

1'den 13'e kadar olan doğal sayıların her biri özdeş 13 karta ayrı ayrı yazılarak bir torbaya atılıyor. Bu torbadan rastgele çekilen bir kartta yazan sayının tek sayı olduğu bilindiğine göre bu sayının asal sayı olma olasılığını bulunuz.

Örnek 4

Bir mobilya fabrikasında bir günde 100 yeşil koltuk ve 75 mavi koltuk üretimi yapılmıştır. Mavi koltukların 10'u, yeşil koltukların ise 20'si hatalı üretildiğine göre

a) Hatalı olmadığı bilinen koltuklardan rastgele seçilen bir koltuğun mavi olma olasılığını bulunuz.
b) Hatalı olduğu bilinen koltuklardan rastgele seçilen bir koltuğun yeşil olma olasılığını bulunuz.

Çözüm

Bir günde üretilen 100 adet yeşil koltuktan 20 tanesi hatalı ise 80 tanesi hatasız, 75 adet mavi koltuktan 10 tanesi hatalı ise 65 tanesi hatasızdır. Bu durum aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

	Yeşil	Mavi
Hatalı	20	10
Hatasız	80	65

a) Seçilen bir koltuğun hatalı olmaması olayı H, mavi olması olayı M ve örnek uzay (üretilen tüm koltukların sayısı) E olsun. Dolayısıyla $s(M \cap H) = 65$, $s(H) = 80 + 65 = 145$ ve $s(E) = 175$ olur. Buradan

$$P(M / H) = \frac{P(M \cap H)}{P(H)} = \frac{\frac{s(M \cap H)}{s(E)}}{\frac{s(H)}{s(E)}} = \frac{\frac{65}{175}}{\frac{145}{175}} = \frac{13}{29} \text{ bulunur.}$$

b) Seçilen bir koltuğun hatalı olması olayı K, yeşil olması olayı Y olsun. Dolayısıyla $s(Y \cap K) = 20$ ve $s(K) = 20 + 10 = 30$ olur. Buradan

$$P(Y / K) = \frac{P(Y \cap K)}{P(K)} = \frac{\frac{s(Y \cap K)}{s(E)}}{\frac{s(K)}{s(E)}} = \frac{\frac{20}{175}}{\frac{30}{175}} = \frac{2}{3} \text{ bulunur.}$$

Örnek 5

Bir kutuda 25 sağlam, 5 bozuk kalem vardır. Çekilen kalemin yerine konulmaması şartıyla rastgele, art arda 2 kalem seçilirse çekilen kalemlerin her ikisinin de bozuk olma olasılığını bulunuz.

Çözüm

İlk çekilen kalemin bozuk olma olayı A olsun. Buradan $P(A)=\frac{5}{30}$ olur. İkinci sırada çekilen kalemin bozuk olma olayı B olsun. Buradan çekilen kalem kutuya konulmadığından örnek uzay ve bozuk kalem sayısı birer azalır. B olayının gerçekleşme olasılığı A olayının gerçekleşmesine bağlı olduğundan $P(B\,/\,A)=\frac{4}{29}$ bulunur. Çekilen her iki kalemin bozuk olması demek "İlk sırada çekilen kalemin bozuk olması ve ikinci sırada çekilen kaleminde bozuk olması" demektir. Bu durumda istenen olasılık $P(A\cap B)$ olduğundan olasılıkta çarpma kuralına göre $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B\,/\,A)=\frac{5}{30}\cdot\frac{4}{29}=\frac{2}{87}$ bulunur.

Örnek 6

E örnek uzayının iki olayı A ve B olsun. $P(A)=\frac{1}{6}$, $P(B)=\frac{1}{5}$ ve $P(A\cup B)=\frac{1}{3}$ olduğuna göre $P(A\,/\,B)$ değerini bulunuz.

Çözüm

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow\frac{1}{3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{5}-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{5}-\frac{1}{3}=\frac{1}{30}$ olur.

Buradan $P(A\,/\,B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{5}}=\frac{1}{30}\cdot\frac{5}{1}=\frac{1}{6}$ bulunur.

Sıra Sizde

Hilesiz bir çift zarın atılması deneyinde üst yüze gelen sayıların toplamının 9 olduğu biliniyorsa bu sayılardan birinin 5 olma olasılığını bulunuz.

ALIŞTIRMALAR

1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin alt kümelerinden biri rastgele seçiliyor. Seçilen kümenin üç elemanlı olduğu biliniyorsa bu elemanlardan birinin 1 olma olasılığını bulunuz.

2. Hilesiz para atma deneyinde bir para art arda beş defa atılıyor. İlk dört atışın yazı geldiği biliniyorsa beşinci atışın da yazı gelme olasılığını bulunuz.

3. E örnek uzayının iki olayı A ve B olmak üzere

$P(A') = \frac{4}{5}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ ve $P(A \cup B) = \frac{3}{8}$

olduğuna göre $P(A / B)$ değerini bulunuz.

4. Bir torbada özdeş 5 siyah ve özdeş 4 beyaz bilye vardır. Bu torbadan rastgele çekilen 2 bilyenin aynı renkte olduğu biliniyorsa her ikisinin de siyah olma olasılığını bulunuz.

5. Güray, kızı Zeynep'le aşağıda kuralları verilen kelime oluşturma oyununu oynamak istiyor. Oyunun kuralları şu şekildedir:

- Türk alfabesindeki harflerin her biri özdeş kartlara yazılır.
- Bu kartlar 5 torbaya rastgele atılır.
- Bu torbaların herhangi birinden bir kart rastgele çekilir.
- Çekilen kartın üzerinde yazan harfle biten bir kelime oluşturulur.

Güray, harflerin yazılı olduğu kartları 5 torbaya aşağıdaki gibi yerleştiriyor. Daha sonra bu torbaların herhangi birinden rastgele bir kart çekiyor.

1. torba : A, B, C, Ç, D, E, F;
2. torba : G, Ğ, H, İ;
3. torba : I, J, K, L, M, N, O, Ö, P;
4. torba : R, S, Ş,T, U ve
5. torba : Ü, V, Y, Z.

Güray'ın kartı çektiği torbada en az 2 sesli harfin olduğu biliniyorsa Güray'ın çektiği kartta A harfinin olma olasılığını bulunuz (Türk alfabesinde A, E, I, İ, O, Ö, U, Ü olmak üzere 8 sesli harf bulunmaktadır.).

6. 12 erkek ve 8 kızdan oluşan bir sınıfta erkeklerin 4'ü, kızların 5'i sarışındır. Bu sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin sarışın olmadığı biliniyorsa erkek olma olasılığını bulunuz.

7. Aynı düzlemdeki herhangi üçü doğrusal olmayan 6 noktadan biri A noktasıdır. Bu 6 nokta arasından rastgele seçilen 3 noktanın bir üçgenin köşeleri olduğu biliniyorsa bu köşelerden birinin A noktası olma olasılığını bulunuz.

11.7.1.2. Bağımlı ve Bağımsız Olayların Olasılıkları

Bilgi

E örnek uzayının iki olayı A ve B olsun.
A ile B olaylarından birinin gerçekleşmesi diğerinin gerçekleşmesini etkilemiyorsa bu olaylara **bağımsız olaylar** denir.

Örnek 7

A ile B bağımsız olaylar olduğuna göre $P(A \cap B)$ ifadesini $P(A)$ ve $P(B)$ cinsinden yazınız.

Çözüm

A ile B bağımsız olaylar olduğunda herhangi bir koşul altında birbirlerini etkilemezler.
Bu durumda $P(A / B) = P(A)$ olur. Koşullu olasılığa göre

$P(A / B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ olarak elde edilir.

İpucu

A ile B bağımsız olaylar ise
- $P(A \text{ ve } B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$,
- $P(A \text{ veya } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,
- $P(A \text{ ya da } B) = P(A - B) + P(B - A)$ olur.

Örnek 8

Hilesiz bir madenî para art arda iki kez atıldığında her iki atışta da tura gelme olasılığını bulunuz.

Çözüm

Hilesiz bir madenî paranın iki kez atılması deneyinde örnek uzay $2^2 = 4$ olur.
İlk atışta tura gelme olayı A olsun. Bu durumda $A = \{TY, TT\}$ ve $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ olur.

İkinci atışta tura gelme olayı B olsun. Bu durumda $B = \{YT, TT\}$ ve $P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ olur.
İlk atış ile ikinci atış birbirini etkilemediği için bu iki olay bağımsız olaylardır. Buradan her iki atışta da tura gelme olasılığı $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ bulunur.

Örnek 9

Bir yüzü sarı, iki yüzü bordo ve üç yüzü mavi olan hilesiz bir zar art arda iki kez atılıyor.

a) İlk atışta bordo ve ikinci atışta mavi yüzeyin üste gelme olasılığını bulunuz.

b) Her iki atışta da mavi yüzeyin üste gelme olasılığını bulunuz.

Çözüm

Hilesiz bir zarın art arda atılışında gerçekleşen her olay birbirini etkilemeyeceğinden bu olaylar bağımsız olaylardır.

a) İlk atışta bordo yüzeyin üste gelme olayı B olsun. Bu durumda $P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ olur. İkinci atışta mavi yüzeyin üste gelme olayı M olsun. Bu durumda $P(M)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ olur. Buradan ilk atışta bordo ve ikinci atışta mavi yüzeyin üste gelme olasılığı $P(B \cap M)=P(B)\cdot P(M)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ bulunur.

b) Her iki atışta da mavi yüzeyin üste gelme olasılığı $P(M \cap M)=P(M)\cdot P(M)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ bulunur.

Sıra Sizde

Hilesiz bir zar art arda 2 kez atılıyor. Üst yüze birinci atışta 3, ikinci atışta 5 gelme olasılığını bulunuz.

Örnek 10

Bir torbada 1'den 12'ye kadar numaralandırılmış 12 özdeş kart vardır. Çekilen kartın geri atılması şartıyla torbadan art arda rastgele seçilen iki karttan birincisindeki numaranın asal sayı ve ikincisindeki numaranın 8'den büyük bir sayı olma olasılığını bulunuz.

Çözüm

Birinci çekilen kartta yazan sayının asal sayı olması olayı A, ikinci çekilen kartta yazan sayının 8'den büyük bir sayı olması olayı B olsun. İlk çekilen kart torbaya geri atıldığından A ve B olayları bağımsız olaylardır. $A=\{2, 3, 5, 7, 11\}$, $B=\{9, 10, 11, 12\}$ ve $E=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ olmak üzere

$P(A)=\frac{s(A)}{s(E)}=\frac{5}{12}$ ve $P(B)=\frac{s(B)}{s(E)}=\frac{4}{12}$ dir. Bu durumda istenen olasılık

$P(A \cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{12}=\frac{5}{36}$ bulunur.

Örnek 11

Bir şirkette çalışan 50 kişinin yaptığı bağışlarla ilgili aşağıdaki bilgiler verilmiştir.

- Her bir çalışan, lösemili çocuklar veya şehit yakınları için bağışta bulunmuştur.
- 30 kişi, lösemili çocuklar için bağışta bulunmuştur.
- 25 kişi, şehit yakınları için bağışta bulunmuştur.

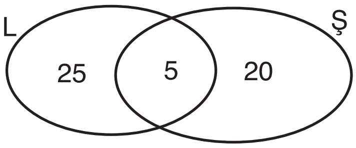
Verilen bu bilgilere göre rastgele seçilecek bir çalışanın lösemili çocuklar ya da şehit yakınları için bağışta bulunmuş olma olasılığını bulunuz.

Çözüm

Lösemili çoçuklar için bağışta bulunanların oluşturduğu küme L, şehit yakınları için bağışta bulunanların oluşturduğu küme Ş olsun.

$s(L \cup Ş) = s(L) + s(Ş) - s(L \cap Ş) \Rightarrow 50 = 30 + 25 - s(L \cap Ş) \Rightarrow s(L \cap Ş) = 5$ olur.

$s(L - Ş) = s(L) - s(L \cap Ş) = 30 - 5 = 25$ ve $s(Ş - L) = s(Ş) - s(Ş \cap L) = 25 - 5 = 20$ olur.



Bu durumda rastgele seçilecek bir çalışanın lösemili çocuklar ya da şehit yakınları için bağışta bulunmuş olma olasılığı $P(L - Ş) + P(Ş - L) = \frac{25}{50} + \frac{20}{50} = \frac{45}{50} = \frac{9}{10}$ olur.

Örnek 12

Atıcılık sporuyla uğraşan Ahmet ve Barış isimli iki sporcudan Ahmet'in hedefi vurma olasılığı $\frac{1}{3}$, Barış'ın aynı hedefi vurma olasılığı $\frac{2}{5}$'dir. Her ikisinin aynı anda bu hedefe birer atış yapması durumunda

a) Sadece Ahmet'in hedefi vurma olasılığını bulunuz.
b) **En az** birinin hedefi vurma olasılığını bulunuz.

Çözüm

Ahmet ile Barış'ın hedefe atış yapıp hedefi vurma olayları bağımsız olaylardır. Ahmet'in hedefi vurma olayı A olsun. Buradan $P(A) = \frac{1}{3}$ olur. Barış'ın hedefi vurma olayı B, vuramama olayı B' olsun. Buradan $P(B) = \frac{2}{5}$ ve $P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ olur.

a) Sadece Ahmet'in hedefi vurması "Ahmet'in hedefi vurması ve Barış'ın hedefi vuramaması" anlamına gelir. Bu durumda istenen olasılık $P(A \text{ ve } B') = P(A \cap B') = P(A) \cdot P(B') = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$ bulunur.

b) En az birisinin hedefi vurması "Ahmet'in veya Barış'ın hedefi vurması" anlamına gelir. Bu durumda istenen olasılık,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$
$$P(A \cup B) = \underset{(5)}{\frac{1}{3}} + \underset{(3)}{\frac{2}{5}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{5}{15} + \frac{6}{15} - \frac{2}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \text{ olur.}$$

İpucu

A olayı B olayından bağımsız ise B' olayından da bağımsızdır. Dolayısıyla B olayının gerçekleşmesi A olayını etkilemiyorsa B olayının gerçekleşmemesi de A olayını etkilemez.

Sıra Sizde

Aynı sınava giren Ali ve Çınar isimli iki arkadaştan Ali'nin başarılı olma olasılığı $\frac{3}{4}$, Çınar'ın başarılı olma olasılığı ise $\frac{2}{5}$'dir. Buna göre bu sınavda

a) Her ikisinin de başarılı olma olasılığını bulunuz.

b) Ali'nin başarılı Çınar'ın başarısız olma olasılığını bulunuz.

c) Ali veya Çınar'ın başarılı olma olasılığını bulunuz.

Bilgi

Bir olayın sonucu diğer bir olayın sonucunu etkiliyorsa bu olaylara **bağımlı olaylar** denir.

Örnek 13

Bir torbada özdeş 4 kırmızı, özdeş 2 beyaz bilye vardır. Çekilen bilyeler tekrar torbaya atılmamak koşuluyla bu torbadan art arda çekilen 2 bilyeden birincinin kırmızı, ikincinin beyaz olma olasılığını bulunuz.

Çözüm

İlk çekilen bilyenin kırmızı olma olayı A olsun. Bu durumda $P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ olur. A olayı gerçekleştiğinde torbadaki bilye sayısı 1 azalacağından bundan sonra gerçekleşecek herhangi bir olayın olasılığını etkiler. Dolayısıyla bu olaylar bağımlı olaylardır. Buradan birincinin kırmızı çekilme olayına bağlı olarak ikincinin beyaz çekilme olayı B olsun. Bu durumda $P(B)=\frac{2}{5}$ olur. İstenen durumun olasılığı ise $P(A)\cdot P(B)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$ bulunur.

Örnek 14

İçinde aynı boyutta 20 kalem bulunan bir kutudaki kalemlerin 8'i kurşun, 12'si tükenmez kalemdir. Kutudan rastgele bir kalem alınıyor ve alınan kalem kutuya geri atılmıyor, sonra kutudan bir kalem daha alınıyor. Buna göre

a) Kutudan alınan birinci kalemin kurşun, ikinci kalemin tükenmez kalem olma olasılığını bulunuz.

b) Kutudan alınan iki kalemin de kurşun kalem olma olasılığını bulunuz.

Çözüm

Kutudan alınan ilk kalem, kutuya geri atılmadığı için bu iki kalemin alınması olayı bağımlı olaylardır.

a) Kutudan alınan birinci kalemin kurşun kalem olması olayı K_1, ikinci kalemin tükenmez kalem olması olayı T_2 olsun. Bu durumda $s(K_1) = 8$ ve $s(T_2) = 12$ olur.

Birinci kalemin kurşun kalem olma olasılığı $P(K_1) = \frac{s(K_1)}{s(E)} = \frac{8}{20}$ olur.

İkinci kalemin tükenmez kalem olma olasılığı $P(T_2) = \frac{s(T_2)}{s(E)} = \frac{12}{19}$ olur.

Sonuç olarak kutudan alınan birinci kalemin kurşun, ikinci kalemin tükenmez kalem olma olasılığı

$P(K_1 \cap T_2) = P(K_1) \cdot P(T_2) = \frac{8}{20} \cdot \frac{12}{19} = \frac{24}{95}$ bulunur.

b) Kutudan alınan birinci kalemin kurşun kalem olması olayı K_1, ikinci kalemin de kurşun kalem olması olayı K_2 olsun. Bu durumda $s(K_1) = 8$, $s(K_2) = 7$ olmak üzere $P(K_1) = \frac{s(K_1)}{s(E)} = \frac{8}{20}$ ve $P(K_2) = \frac{s(K_2)}{s(E)} = \frac{7}{19}$ olur.

Sonuç olarak kutudan alınan iki kalemin de kurşun kalem olma olasılığı
$P(K_1 \cap K_2) = P(K_1) \cdot P(K_2) = \frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19} = \frac{14}{95}$ bulunur.

Sıra Sizde

Bir torbada 3 siyah, 4 beyaz bilye vardır. Alınan bilye torbaya geri atılmamak üzere bu torbadan art arda iki bilye çekiliyor.
Buna göre torbadan çekilen bilyelerden birinin siyah, diğerinin beyaz olma olasılığını bulunuz.

Sıra Sizde

Bir kutuda eşit sayıda çilekli ve çikolatalı şeker vardır. Bu kutudan alınan şeker kutuya geri konulmamak üzere art arda torbadan alınan iki şekerin ikisinin de çilekli olması olasılığı $\frac{3}{14}$ 'tür. Buna göre ilk durumda kutuda kaç şeker olduğunu bulunuz.

ALIŞTIRMALAR

1. Hilesiz bir zarın art arda 2 kez atılması deneyinde birinci atışta zarın üst yüzüne gelen sayının asal sayı, ikinci atışta ise sayının **en çok** 2 olma olasılığını bulunuz.

2. Pınar 11. sınıf matematik kitabını beş çekmecesi olan dolabının herhangi bir çekmecesine rastgele koymuş ve bir süre sonra kitabını dolabın hangi çekmecesine koyduğunu unutmuştur. Pınar'ın çekmeceleri birer birer ve rastgele açarak ve açtığı çekmeceye tekrar bakmamak üzere kitabını üçüncü denemede bulma olasılığı kaçtır?

3. Hilesiz bir çift zar ve hilesiz bir para birlikte atılıyor. Zarların üst yüzüne gelen sayıların toplamının 7 olması ve paranın tura gelmesi olasılığını bulunuz.

4. Bir torbada özdeş 6 kırmızı ve özdeş 4 beyaz bilye vardır. Çekilen her bilye tekrar torbaya atılmak koşuluyla art arda 2 bilye çekiliyor. Çekilen iki bilyenin her ikisinin de kırmızı olma olasılığını bulunuz.

5. Bir torbada özdeş 5 siyah ve özdeş 4 mavi bilye vardır. Bu torbadan çekilen bilye torbaya geri atılmamaktadır. Buna göre art arda çekilen 2 bilyeden birincinin siyah, ikincinin mavi olma olasılığını bulunuz.

6. A torbasında özdeş 4 yeşil, özdeş 2 mavi; B torbasında ise özdeş 3 yeşil, özdeş 3 mavi bilye vardır. A ve B torbalarından aynı anda çekilen birer bilyenin her ikisinin de yeşil olma olasılığını bulunuz.

11.7.1.3. Bileşik Olaylar

Bilgi

Birden fazla basit olaydan oluşan olaylara **bileşik olaylar** denir. Bileşik olaylarda iki veya daha çok olay birlikte ya da birbiri ardınca gerçekleşir.

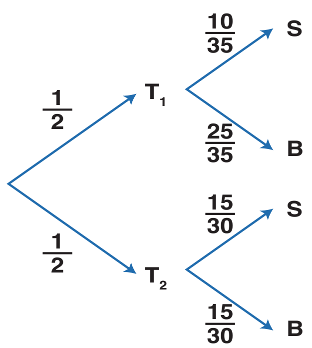
Örnek 15

Her ikisinde de özdeş bilyeler bulunan torbalardan birinde 10 sarı, 25 beyaz bilye; diğerinde ise 15 sarı, 15 beyaz bilye vardır. Rastgele bir torba seçilip bu torbadan rastgele bir bilye çekilirse çekilen bu bilyenin sarı olma olasılığını bulunuz.

Çözüm

Verilen olay "ve" ile "veya" bağlaçları kullanılarak "birinci torba seçilir ve bu torbadan bir tane sarı bilye çekilir veya ikinci torba seçilir ve bu torbadan bir tane sarı bilye çekilir" şeklinde yazılabilir.

Bileşik olayların olasılık hesaplamalarında ağaç diyagramı denilen oklarla aşağıdaki gibi art arda yapılan işlemler belirtilirse istenen sonuca daha kolay ulaşılabilir.
Birinci torbayı seçme olayı T_1, ikinci torbayı seçme olayı T_2, bir tane sarı bilye seçme olayı S, bir tane beyaz bilye seçme olayı B olsun.



Ağaç diyagramında başlangıçtan itibaren istenen olaya kadar olan olasılık değerleri çarpılır. Daha sonra çarpılarak elde edilen sayılar toplanır.
Bu durumda seçilen bir bilyenin sarı olma olasılığı

$$P(S) = P(T_1)\cdot P(S|T_1) + P(T_2)\cdot P(S|T_2)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{10}{35} + \frac{1}{2}\cdot\frac{15}{30}$$
$$= \frac{1}{7} + \frac{1}{4} = \frac{11}{28} \text{ bulunur.}$$

Örnek 16

Üç ayrı fabrikada üretilen bir ilaç türü ile ilgili aşağıdaki bilgiler veriliyor:

I. İkinci ve üçüncü fabrika eşit sayıda üretim yapmaktadır.

II. Birinci fabrikanın üretimi, diğer bir fabrikanın üretiminin 2 katıdır.

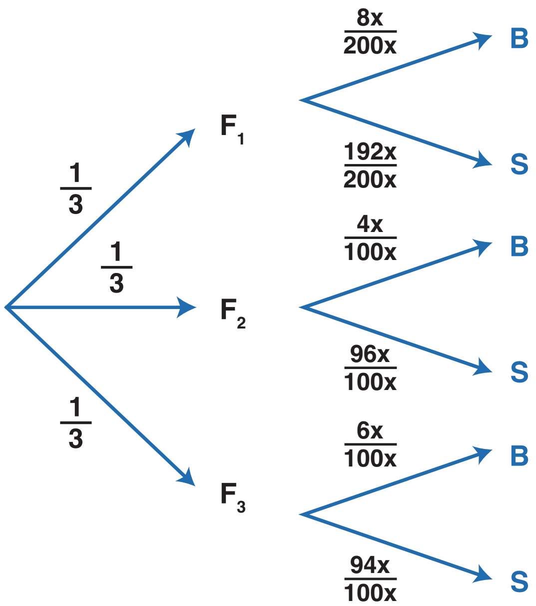
III. Birinci ve ikinci fabrikalarda üretilen ilaçların yüzde 4'ü, üçüncü fabrikada üretilen ilaçların ise yüzde 6'sı bozuk çıkmaktadır.

Buna göre bu fabrikalardan biri rastgele seçilip seçilen fabrikadan rastgele bir ilaç alınıyor. Alınan bu ilacın bozuk çıkma olasılığını bulunuz.

Çözüm

İkinci ve üçüncü fabrikalarda 100x adet ilaç üretilmiş ise birinci fabrikada 200x adet ilaç üretilmiştir. Bu durumda birinci fabrikadaki bozuk ilaç sayısı 8x, ikinci fabrikadaki bozuk ilaç sayısı 4x, üçüncü fabrikadaki bozuk ilaç sayısı ise 6x olur.

Birinci fabrikanın seçilmesi olayı F_1, ikinci fabrikanın seçilmesi olayı F_2, üçüncü fabrikanın seçilmesi olayı F_3, seçilen ilacın bozuk olması olayı B, seçilen ilacın sağlam olması olayı ise S olsun.



İlacın bozuk olması olayı "birinci fabrika seçilmiş ve bu fabrikanın ürettiği bozuk bir ilaç alınmıştır veya ikinci fabrika seçilmiş ve bu fabrikanın ürettiği bozuk bir ilaç alınmıştır veya üçüncü fabrika seçilmiş ve bu fabrikanın ürettiği bozuk bir ilaç alınmıştır" şeklinde yazılabilir. İlacın birinci fabrikadan seçildiği biliniyorsa bozuk olma olasılığı $P(B \,/\, F_1)$, ilacın ikinci fabrikadan seçildiği biliniyorsa bozuk olma olasılığı $P(B \,/\, F_2)$, ilacın üçüncü fabrikadan seçildiği biliniyorsa bozuk olma olasılığı $P(B \,/\, F_3)$ olmak üzere ağaç diyagramındaki veriler kullanılarak

$$P(B) = P(F_1)\cdot P(B \,/\, F_1) + P(F_2)\cdot P(B \,/\, F_2) + P(F_3)\cdot P(B \,/\, F_3)$$

$$P(B) = \frac{1}{3}\cdot\frac{8x}{200x} + \frac{1}{3}\cdot\frac{4x}{100x} + \frac{1}{3}\cdot\frac{6x}{100x}$$

$$P(B) = \frac{8}{600} + \frac{4}{300} + \frac{6}{300}$$

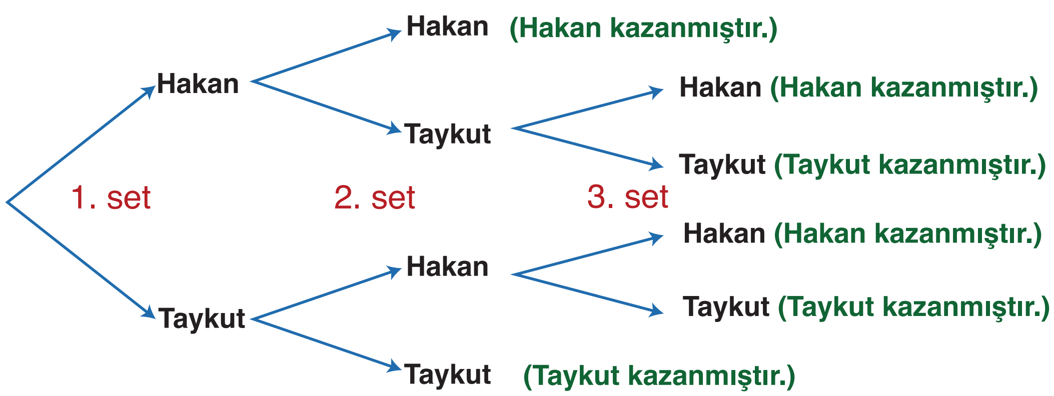
$$P(B) = \frac{28}{600} = \frac{7}{150} \text{ bulunur.}$$

Örnek 17

Hakan ile Taykut masa tenisi oynamaktadır. 2 seti kazananın oyunun galibi olması kararlaştırıldığına göre gerçekleşebilecek tüm durumları ağaç diyagramı ile gösteriniz ve yorumlayınız.

Çözüm

Oyun, ilk iki seti aynı kişinin kazanması durumunda iki sette, ilk iki seti farklı kişilerin kazanması durumunda üçüncü sette bitmiştir. Oyunun setlere göre bitme durumları aşağıda verilen ağaç diyagramındaki gibi gösterilebilir.



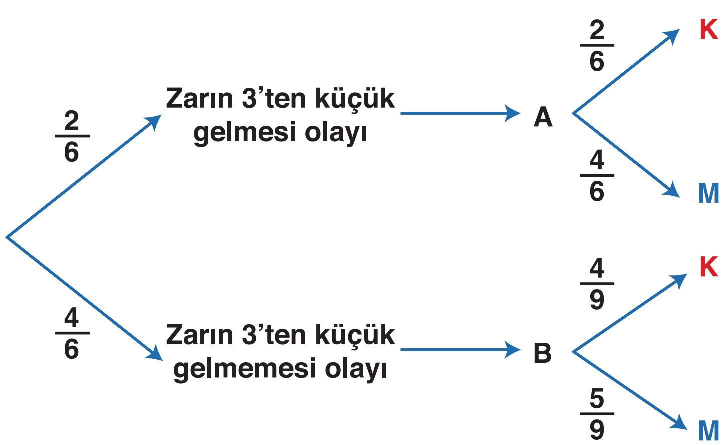
Örnek 18

A torbasında özdeş 2 kırmızı, özdeş 4 mavi; B torbasında ise özdeş 4 kırmızı, özdeş 5 mavi bilye vardır. Hilesiz bir zar atılıyor ve zarın üst yüzüne gelen sayı 3'ten küçük ise A torbasından, 3'ten küçük değilse B torbasından bir bilye çekiliyor.

Çekilen bilyenin kırmızı olma olasılığını bulunuz.

Çözüm

Verilenlere göre ağaç diyagramı aşağıdaki gibi yapılabilir.



"Ve" ile "veya" bağlaçları kullanılarak çekilen bilyenin kırmızı olma olasılığı "zarın üst yüzüne 3'ten küçük sayı geldiğinde A torbası seçilir ve kırmızı bilye çekilir veya zarın üst yüzüne 3'ten küçük olmayan sayı geldiğinde B torbası seçilir ve kırmızı bilye çekilir" şeklinde özetlenebilir.
Ağaç diyagramına göre istenen olasılık

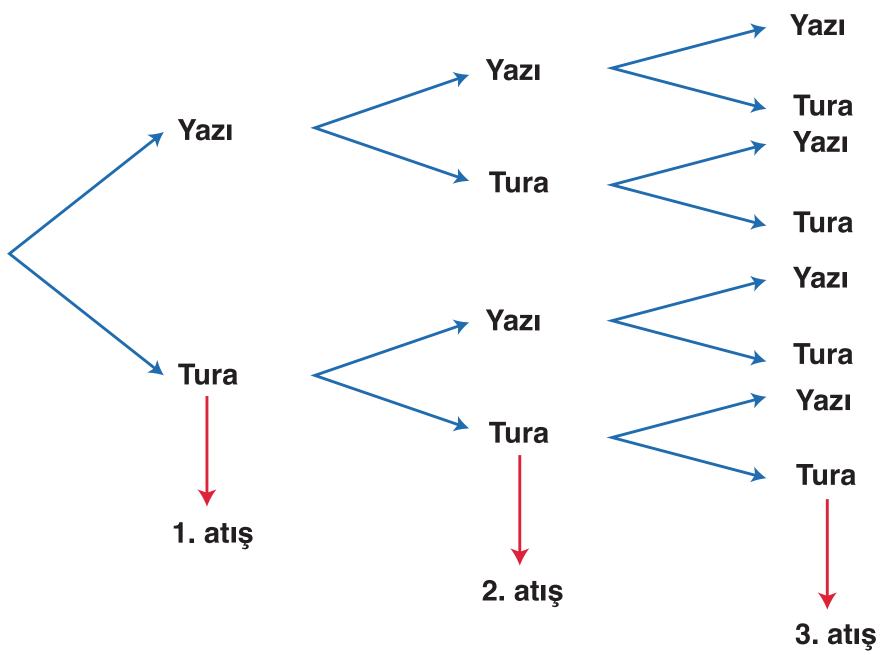
$$\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{36}+\frac{16}{54}$$
$$=\frac{44}{108}$$
$$=\frac{11}{27} \text{ olur.}$$

Örnek 19

Hilesiz bir madenî paranın art arda 3 defa atılması olayında **en az** bir tane yazı gelme olasılığını ağaç diyagramını kullanarak bulunuz.

Çözüm

Hilesiz bir madenî paranın art arda 3 defa atılması olayına ait ağaç diyagramı aşağıdaki gibi oluşturulabilir.



A olayı "hepsinin tura gelmesi" olayı ise A' olayı "en az birinin yazı gelmesi" olayı olur.
Ağaç diyagramında en alttaki oklarla belirtildiği üzere $P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ olur. Bu durumda $P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ bulunur.

Sıra Sizde

Bir kutuda 5 tanesi bozuk olan aynı boyutlarda 20 tane kalem vardır. Çekilen kalemin yerine konulmaması koşulu ile bu kalemlerden art arda iki tane çekiliyor.

a) Çekilen her iki kalemin de bozuk olma olasılığını bulunuz.
b) Çekilen birinci veya ikinci kalemin bozuk olma olasılığını bulunuz.

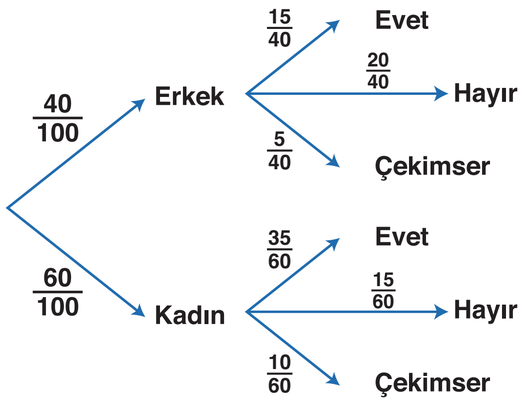
Örnek 20

Cumhuriyet Anadolu Lisesinde yapılması düşünülen bir uygulama ile ilgili okul aile birliğindeki oylamanın sonucu aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

	Evet	Hayır	Çekimser
Kadın	35	15	10
Erkek	15	20	5

Buna göre bu durumu ağaç diyagramında göstererek oylamaya katılanlardan rastgele seçilen birinin erkek veya çekimser oy kullanan biri olma olasılığını bulunuz.

Çözüm



Tablodaki veriler ağaç diyagramı ile yandaki gibi gösterilebilir. Buradan oylamaya katılanlardan rastgele seçilen birinin erkek (E) veya çekimser (Ç) oy kullanan biri olma olasılığı

$$P(E \text{ veya } Ç) = P(E) + P(Ç) - P(E \text{ ve } Ç)$$

$$= \frac{40}{100} + \frac{15}{100} - \frac{5}{100} = \frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

Örnek 21

İki torbadan birincisinde özdeş 3 siyah, özdeş 4 beyaz top; ikincisinde ise özdeş 4 beyaz, özdeş 5 siyah top vardır. Torbaların birinden rastgele bir top çekildiğinde çekilen topun beyaz olduğu biliniyorsa bu topun birinci torbadan çekilmiş olma olasılığını bulunuz.

Çözüm

Beyaz renkte top çekme olayı B, birinci torbadan top çekme olayı I, ikinci torbadan top çekme olayı II olsun. Top çekme olayı "Birinci torba seçilmiş ve bu torbadan beyaz top çekilmiş olması veya ikinci torba seçilmiş ve bu torbadan beyaz top çekilmiş olması " şeklinde gerçekleşmiş olabilir. Buradan

$$P(B) = P(\mathrm{I}) \cdot P(B / \mathrm{I}) + P(\mathrm{II}) \cdot P(B / \mathrm{II}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{7} + \frac{2}{9} = \frac{32}{63} \quad \text{bulunur.}$$

Birinci torbadan beyaz bir bilyenin çekilmiş olma olasılığı $P(\mathrm{I} \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{2}{7}$ olup çekilen topun beyaz olması koşuluyla birinci torbadan çekilmiş olma olasılığı,

$$P(\mathrm{I} / B) = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{32}{63}} = \frac{2}{7} \cdot \frac{63}{32} = \frac{9}{16} \text{ olur.}$$

ALIŞTIRMALAR

1. Bir çikolata kutusunda eş büyüklükte 12 bitter, 8 beyaz çikolata vardır. Polen, arkadaşlarıyla paylaşmak amacıyla bu kutudan rastgele 3 çikolata alıyor. Alınan çikolatalardan yalnız birinin bitter olma olasılığını bulunuz.

2. 11-A sınıfının sınıf öğretmeni Nurşen Hanım sınıfındaki 32 öğrencinin bir kısmına proje, geri kalanlara ise performans ödevi vermiştir. Her öğrencinin yalnız bir ödev aldığı bu durum için aşağıdaki bilgiler verilmektedir.
    - Performans ödevi alan kız öğrencilerin sayısı, proje ödevi alan erkek öğrencilerin sayısının 2 katıdır.
    - Performans ödevi alan erkek öğrenci sayısı 10'dur.
    - Proje ödevi alan kız öğrencilerin sayısı proje ödevi alan erkek öğrencilerin sayısından 2 eksiktir.

   Verilen bu bilgilere göre 11-A sınıfından rastgele seçilen bir öğrencinin performans ödevi alan bir öğrenci veya bir kız öğrenci olma olasılığını bulunuz.

3. Hilesiz bir madenî para ile hilesiz bir zarın birlikte atılması deneyinde paranın yazı veya zarın üst yüzüne gelen sayının **en az** 5 olma olasılığını bulunuz.

4. Hilesiz 3 madenî paranın atılması deneyinde paralardan ikisinin yazı geldiği bilindiğine göre diğer paranın tura gelmiş olma olasılığını bulunuz.

5. Bir torbada özdeş 5 mavi ve özdeş 3 sarı bilye vardır. Çekilen bilye torbaya geri atılmamak şartıyla bu torbadan rengine bakılmaksızın art arda çekilen iki bilyeden birisinin mavi olduğu biliniyorsa diğerinin sarı olma olasılığını bulunuz.

6. Bir torbada özdeş 2 kırmızı ve özdeş 4 beyaz bilye vardır. Çekilen bilye torbaya geri atılmamak şartıyla bu torbadan rengine bakılmaksızın art arda çekilen 2 bilyeden birincinin kırmızı, ikincinin beyaz olma olasılığını bulunuz.

7. İki torbadan birincisinde özdeş 4 kırmızı, özdeş 3 pembe bilye; ikincisinde ise özdeş 3 kırmızı ve özdeş 4 pembe bilye vardır. Aynı anda her iki torbadan birer bilye çekiliyor. Çekilen bilyelerin farklı renklerde olma olasılığını bulunuz.

11.7.2. Deneysel ve Teorik Olasılık

Terimler ve Kavramlar
- Deneysel Olasılık
- Teorik Olasılık

Neler Öğreneceksiniz?
- Deneysel olasılık ile teorik olasılığı ilişkilendirmeyi öğreneceksiniz.

11.7.2.1. Deneysel ve Teorik Olasılık İlişkisi

Bilgi

Bir olasılık deneyinden teorik olarak beklenen olasılığa **teorik olasılık** denir.

Bir olayın gerçekleşme olasılığını olayla ilgili yapılan bir deneyin sonuçlarına göre hesaplamaya **deneysel olasılık** denir.

Örnek 1

Bir zarın atılışı deneyi 10 defa tekrarlandığında üst yüzüne gelen sayılar 1, 1, 2, 3, 2, 1, 5, 6, 1, 1'dir. Bu zar atıldığında üst yüzüne gelen sayının

a) 1 olmasının deneysel olasılığını bulunuz.

b) 4 olmasının deneysel olasılığını bulunuz.

Çözüm

a) Zar atılması deneyinde 1 gelmesi olayı A olsun. Bu durumda $s(A)=5$ olur. Deneme sayısı 10 olduğundan A olayının gerçekleşme olasılığı $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$ bulunur.

b) Zar atılması deneyinde 4 gelmesi olayı B olsun. Bu durumda $s(B)=0$ olur. Deneme sayısı 10 olduğundan B olayının gerçekleşme olasılığı $\frac{0}{10}=0$ bulunur.

Sıra Sizde

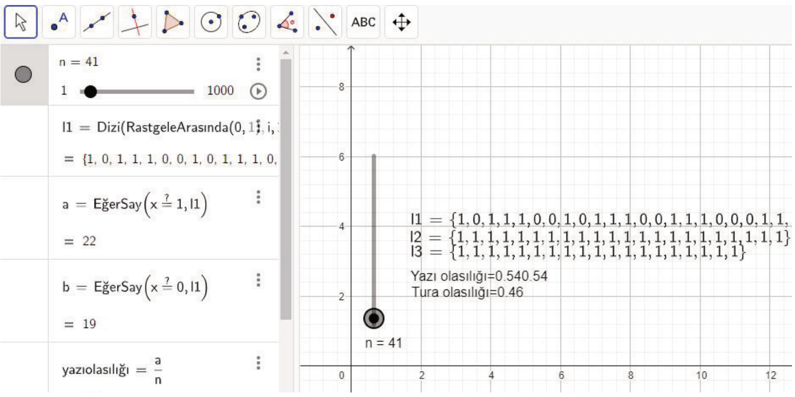
10 defa zar atınız ve yaptığınız bu deneyin sonucuna göre 1 gelme olasılığını, 2 gelme olasılığını, 3 gelme olasılığını, 4 gelme olasılığını, 5 gelme olasılığını, 6 gelme olasılığını bulunuz.

Örnek 2

Dinamik matematik yazılım programında bir madenî para atma deneyinin art arda yapılması durumunda deney sayısını artırdıkça paranın üst yüzüne yazı gelmesi ile tura gelmesinin deneysel ve teorik olasılığını ilişkilendiriniz.

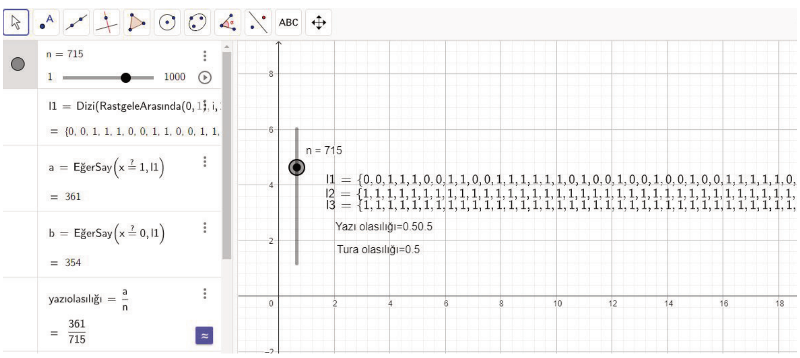
Çözüm

Bir dinamik yazılım programı açıp n sürgüsü oluşturunuz. Sürgünün minimum değerini 1, maksimum değerini 1000, artış değerini 1 yapınız. n sürgüsü, para atma denemelerinin sayısını gösterir.
Girişe “Dizi” yazınız. Oluşan satırda “ifade, değişken, başlangıç, bitiş” yerlerine sırasıyla “RastgeleArasında(0,1), i , 1, n” yazınız. RastgeleArasında(0,1) ifadesinde paranın tura gelmesi 0, yazı gelmesi 1 ile gösterilir.
Sürgüyü sağa sola hareket ettirdiğinizde elemanları 0 ve 1 olan l1 oluşacaktır. Yazı ve turanın kaçar kez geldiğini gösteren l1 kümesi aynı zamanda örnek uzaydır. Girişe “EğerSay” yazınız. Oluşan satırdaki koşul kısmına “x==1”, liste kısmına “l1” yazdığınızda örnek uzay kümesinde kaç adet 1 (yazı) olduğunu görebilirsiniz. Girişe “EğerSay” yazınız. Oluşan satırdaki koşul kısmına “x==0”, liste kısmına “l1” yazdığınızda örnek uzay kümesinde kaç adet 0 (tura) olduğunu görebilirsiniz. Girişe “yazıolasılığı=a/n” yazdığınızda yazı gelme olasılığını, “turaolasılığı=b/n” yazdığınızda tura gelme olasılığını görebilirsiniz.
Girişe “Dizi” yazınız. Oluşan satırda “ifade, değişken, başlangıç, bitiş” yerlerine sırasıyla “1, i, 1, a” yazdığınızda kaç kez yazı geldiğini gösteren l2 yi elde edebilirsiniz. Girişe “Dizi” yazınız. Oluşan satırda “ifade, değişken, başlangıç, bitiş” yerlerine sırasıyla “0, i, 1, b” yazdığınızda kaç kez tura geldiğini gösteren l3 ü elde edebilirsiniz. Giriş penceresinde bulunan l1, l2 ve l3 ü imleç ile tutarak grafik penceresine yerleştiriniz. Aşağıdaki görselde n=41 için yazı ve tura gelme olasılıkları görülmektedir.



“Metin” sekmesine, ardınan ekrana tıklayınız. Açılan penceredeki metin kutusuna “Yazı olasılığı =” yazınız. Pencerenin alt kısmındaki “Gelişmiş” butonuna tıklayınız. Açılan bölümdeki dinamik yazılım programının ikonuna tıklayınız. Ardından “yazıolasılığı” kısmına tıklayarak tamama tıklayınız. Yazı gelme olasılığı grafik ekranında ondalık olarak görülecektir. Tura gelme olasılığını görmek için metin kutusuna “Tura olasılığı =” yazarak aynı işlemi tekrarlayınız.

n sürgüsünü n=1 konumu ile n=1000 konumu arasında hareket ettiriniz. n değeri arttıkça yazı gelme olasılığı ile tura gelme olasılığı arasındaki farkın azaldığı görülür, her birinin teorik olasılığı olan $\frac{1}{2}$ değerine yaklaşılır. Aşağıdaki görselde n=715 için yazı ve tura gelme olasılıkları görülmektedir.



Sürgünün maksimum değerini n=2000 yaparak para atma deneyini sürgünün bu değeri için gerçekleştiriniz. Bulduğunuz sonucu yorumlayınız.

Sıra Sizde

Dinamik matematik yazılım programında bir madenî para atma deneyini 30 kez yapınız. Kaydettiğiniz sayılardan rastgele biri seçildiğinde seçilen sayının 8 olma olasılığını bulunuz.

Örnek 3

Fatih; her gün, sabırla ve düzenli antrenman yaparak basketbol potasına serbest atış çizgisinden 100 atış yapıyor. Bu atışların 52 tanesi isabetli olduğuna göre Fatih'in attığı bir topun isabetli olma olasılığını hesaplayınız.

Çözüm

Deneysel olarak Fatih'in bir atışının isabet etmiş olma olasılığı,

$\dfrac{\text{ilk 100 atıştaki basket sayısı}}{\text{deneme sayısı}} = \dfrac{52}{100}$ olup %52 bulunur.

Örnek 4

Tarihsel ve doğal mirasa duyarlılık kapsamında yapılan ankette 1000 kişiye bu güne kadar bir müzeyi ziyaret edip etmedikleri sorulmuştur. Alınan cevaplar ise aşağıdaki kutuda gösterilmiştir.

	Ziyaret eden	Ziyaret etmeyen
Kadın	400	200
Erkek	300	100

Yapılan bu deneyde cevap veren bir kişinin hayır diyen bir kadın ya da evet diyen bir erkek olma olasılığını bulunuz.

Çözüm

1000 kişiden müzeyi ziyaret etmeyen kadın sayısı 200 olduğundan bu olayın olma olasılığı $\dfrac{200}{1000}$ olur.

1000 kişiden müzeyi ziyaret eden erkek sayısı 300 olduğundan bu olayın olma olasılığı $\dfrac{300}{1000}$ olur.

Sonuç olarak bu deneyde cevap veren bir kişinin müzeyi ziyaret etmeyen bir kadın ya da ziyaret eden bir erkek olma olasılığı $\dfrac{200}{1000} + \dfrac{300}{1000} = \dfrac{500}{1000} = \dfrac{1}{2}$ olur.

Sıra Sizde

"Başkalarına kendine davranılmasını istediğin şekilde davranıyor musun?" sorusunu sınıfınızdaki tüm öğrencilere sorunuz. Aldığınız her bir cevabın deneysel olasılığını hesaplayınız.

ALIŞTIRMALAR

1. Bir madenî paranın art arda 20 defa atılması deneyinde 8 defa yazı 12 defa tura gelmiştir. Bu deneyin sonucuna göre paranın tura gelme olasılığını bulunuz.

2. Bir firma çalışanı, müşterilerine satışını yaptığı tablet bilgisayarlardan duyulan memnuniyeti araştırmak amacıyla 800 kişiyle telefon görüşmesi yapmıştır. Bu görüşmeler sonucunda 600 müşterinin memnun olduğu, 150 müşterinin memnun olmadığı, 50 müşterinin ise kararsız olduğu bilgilerine ulaşmıştır. Buna göre görüşme yapılan müşterilerden birinin memnun olmayan bir müşteri olma olasılığını bulunuz.

3. $n > 120$ olmak üzere hilesiz bir madenî paranın art arda n defa atılması deneyinin sonuçlarına göre paranın üst yüzüne yazı gelme olasılığı %40'tır. Buna göre n'nin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

4. Bir mağazada satılan aynı markaya ait kazaklarla ilgili aşağıdaki bilgiler veriliyor.
   - **I.** Kazaklar kırmızı ya da mavi renklidir.
   - **II.** Satılan kırmızı kazak sayısı, satılan mavi kazak sayısından 10 fazladır.
   - **III.** Her müşteri bu kazaklardan yalnız birer tane almıştır.
   - **IV.** Kazak alanlardan rastgele seçilen bir kişinin kırmızı kazak almış biri olma olasılığı %62,5'tir.

   Buna göre bu mağazada toplam kaç tane kırmızı kazak satıldığını bulunuz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

A) Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerlere doğru ifadeyi yazınız.

1. A olayının gerçekleşmesi B olayına bağlı ise A'nın B koşulu altındaki olma olasılığına .... denir.

2. A olayının gerçekleşmesi B olayının gerçekleşmesine bağlı ise bu olaylar ....olaylardır.

3. A ile B bağımlı olaylar ise $P(A \cap B) =$ .... olur.

B) Aşağıdaki açık uçlu soruların doğru cevabını bulunuz.

4. Hilesiz bir çift zar atılması deneyinde zarın üst yüzüne gelen sayıların toplamının 9'dan büyük olduğu bilindiğine göre toplamının 11 olma olasılığını bulunuz.

5. A ve B olayları için $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$, $P(A) = \frac{1}{5}$ ve $P(B) = \frac{3}{5}$ olduğuna göre $P(A' \cap B')$ değerini bulunuz.

6. Bir ilacın hastalarda alerji yapması olasılığı %2'dir. Bu ilaç 3 hastaya verildiğinde **en az** birinde alerji yapmaması olasılığını bulunuz.

7. Bir sınıftaki öğrencilerin %85'i matematikten, %45'i fizikten, %25'i ise hem matematik hem fizikten başarısızdır.
Bu sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin fizikten başarısız olduğu bilindiğine göre matematikten de başarısız olma olasılığını bulunuz.

8. İş güvenliği ile ilgili 100 kişi üzerinde yapılan bir araştırma sonucunda aşağıdaki bilgilere ulaşılmıştır:

I. İş güvenliği kurallarına uymayıp da yaralanan işçi sayısı, iş güvenliği kurallarına uyup da yaralanan işçi sayısının $\frac{15}{2}$ katıdır.

II. İş güvenliği kurallarına uyup da yaralanmayan işçi sayısı, iş güvenliği kurallarına uyup da yaralanan işçi sayısının 16 katıdır.

III. İş güvenliği kurallarına uyan işçi sayısı 68'dir.

Buna göre bu araştırmada seçilen işçilerden birinin yaralanmadığı biliniyorsa iş güvenliği kurallarına uyan bir işçi olma olasılığını bulunuz.

9 - 11. soruları aşağıda verilen bilgilere göre cevaplandırınız.

100 kişiden oluşan bir gönüllü grubunun yaptığı program çerçevesinde illerinde bulunan Sevgi Evi, Huzurevi ve Türkiye Şehit Aileleri Derneğine yapılan ziyaret ile ilgili bilgiler aşağıda verilmiştir.

I. Sevgi Evine 59, Huzurevine 51 ve Türkiye Şehit Aileleri Derneğine 40 kişi gitmiştir.

II. Her 3 kurumu da ziyaret eden 12 kişidir.

III. Yalnız Sevgi Evini ziyaret eden 30 kişi, yalnız Huzurevini ziyaret eden 20 kişi ve yalnız Türkiye Şehit Aileleri Derneğini ziyaret eden 12 kişidir.

9. Bu gruptan rastgele seçilecek birinin Huzurevi veya Sevgi Evini ziyaret etmiş olma olasılığını bulunuz.

10. Bu gruptan rastgele seçilen birinin Türkiye Şehit Aileleri Derneğini ziyaret ettiği bilindiğine göre Huzurevini ziyaret etmiş olma olasılığını bulunuz.

11. Bu gruptan rastgele seçilecek birinin Sevgi Evini ziyaret ettiği bilindiğine göre Huzurevini ve Türkiye Şehit Aileleri Derneğini ziyaret etmiş olma olasılığını bulunuz.

C) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruların doğru seçeneğini işaretleyiniz.

12. Bir fabrikada üretilen ürünlerin %30'u A makinesinde, %60'ı B makinesinde, %10'u ise C makinesinde üretiliyor.

A makinesinde üretilen ürünlerin %5'i,

B makinesinde üretilen ürünlerin %4'ü,

C makinesinde üretilen ürünlerin %3'ü bozuk çıkıyor.

Rastgele alınan bir ürün bozuk olduğuna göre bu ürünün A makinesinde üretilmiş olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{5}{14}$ B) $\frac{7}{14}$ C) $\frac{9}{14}$ D) $\frac{11}{14}$ E) $\frac{13}{14}$

13. Bir işyerinde 12 kadın ve 18 erkek çalışan vardır. İş uzmanlığı üzerine yapılan bir sınavda 3 kadın ile 5 erkek başarısız olmuştur. Bu işyerinden seçilen bir kişinin başarılı olduğu bilindiğine göre bu kişinin kadın olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{3}{22}$ B) $\frac{5}{22}$ C) $\frac{7}{22}$ D) $\frac{9}{22}$ E) $\frac{13}{22}$

14. Bir kutuda özdeş 3 mavi ve özdeş 4 kırmızı bilye vardır. Çekilen bilye kutuya tekrar atılmamak şartıyla bu kutudan rastgele ve art arda seçilen iki bilyeden ikincinin kırmızı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{2}{7}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{4}{7}$ D) $\frac{5}{7}$ E) $\frac{6}{7}$

15. Kültürel faaliyetleri özendirmeyi amaçlayan bir okuldaki her bir öğrenci yanına velisi, arkadaşı veya öğretmeninden birini seçerek seçtiği kişi ile tiyatro, opera, müze ziyareti yapacak ya da bir resim sergisine gidecektir. Bu okuldaki Sibel'in arkadaşı ile tiyatroya gitme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{1}{10}$ E) $\frac{1}{12}$

16. Bir ikinci el araba pazarında araçların %60'ı benzin, %70'i LPG ve %30'u hem benzin hem LPG tüketen araçlardan oluşmaktadır. Buna göre bu pazardan alınan herhangi bir aracın LPG tükettiği biliniyorsa aynı zamanda benzin tüketen bir araç olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{4}{7}$ D) $\frac{5}{14}$ E) $\frac{9}{14}$

17. Hilesiz bir madenî para atma deneyinde 100 atışta 30 defa tura geldiği bilindiğine göre **En az** kaç atış daha yapılırsa tura gelme olasılığı $\frac{4}{11}$ olur?

A) 30 B) 20 C) 15 D)10 E) 5

18. A sepetinde özdeş 4 sağlam, özdeş 2 çatlak; B sepetinde özdeş 3 sağlam, özdeş 3 çatlak yumurta vardır. Bu iki sepetten aynı anda ikişer tane yumurta rastgele alınıyor. Alınan yumurtaların 4 tanesinin de sağlam olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{2}{11}$ B) $\frac{2}{25}$ C) $\frac{6}{11}$ D) $\frac{7}{11}$ E) $\frac{9}{11}$

19. A kutusunda özdeş 3 turuncu, özdeş 2 beyaz; B kutusunda özdeş 2 turuncu, özdeş 3 beyaz ve C kutusunda ise özdeş 1 turuncu, özdeş 3 beyaz bilye vardır. Kutulardan biri rastgele seçilip içinden rastgele bir bilye alınıyor. Alınan bilyenin turuncu olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{5}{12}$ B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{7}{12}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

20. A torbasında özdeş 2 siyah, özdeş 4 beyaz; B torbasında ise özdeş 3 siyah, özdeş 3 beyaz top vardır. A torbasından rastgele bir top çekilip rengine bakılmadan B torbasına atılıyor. Ardından B torbasından bir top çekiliyor. Son durumda B torbasından çekilen topun siyah olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{4}{21}$ B) $\frac{5}{21}$ C) $\frac{8}{21}$ D) $\frac{10}{21}$ E) $\frac{11}{21}$

21. İki torbadan birincisinde özdeş 3 siyah, 2 beyaz; ikincisinde ise özdeş 2 siyah, 4 beyaz bilye vardır. Torbalardan herhangi birinden rastgele çekilen bir bilyenin beyaz olduğu bilindiğine göre bu bilyenin ikinci torbadan çekilmiş olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{5}{8}$ E) $\frac{7}{8}$

22. İçinde özdeş 5 kırmızı ve özdeş 4 beyaz bilye bulunan bir torbadan bir bilye çekilip ardından bir zar atılıyor. Çekilen bilyenin beyaz renkli veya zarın asal sayı gelme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{18}$ B) $\frac{5}{36}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{13}{18}$ E) $\frac{5}{18}$

23. Şehirler arası yolcu taşıyan bir otobüste 1'den 34'e kadar numaralı 34 koltuk vardır. Bu otobüste seyahat eden Hilal Hanım'ın koltuk numarasının tek sayı olduğu bilindiğine göre bu sayının asal sayı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{5}{17}$ B) $\frac{11}{34}$ C) $\frac{13}{34}$ D) $\frac{9}{17}$ E) $\frac{11}{17}$

24. Bir ayakkabı üretim firmasının elemanı olan Neşe, ürettikleri ayakkabıların satıldığı bir AVM'de gün boyunca ziyarete gelen 500 kişiye ayakkabılarından alıp almadıklarını ve bu marka ile ilgili son reklamın bu duruma etkisi olup olmadığını sormuştur. Alınan cevaplar ise aşağıdaki tablo ile gösterilmiştir.

	Reklam etkili oldu diyenlerin sayısı	Reklam etkili olmadı diyenlerin sayısı
Satın aldım diyenlerin sayısı	130	70
Satın almadım diyenlerin sayısı	0	300

Buna göre bu kişiler arasından rastgele seçilen birinin bu markayı tercihinde reklamın etkisi olmadığı biliniyorsa ayakkabıyı satın almış olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{7}{37}$ B) $\frac{22}{37}$ C) $\frac{24}{37}$ D) $\frac{26}{37}$ E) $\frac{28}{37}$

DEĞERLENDİRME

Cevaplarınızı cevap anahtarı ile karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorularla ilgili konuları veya faaliyetleri geri dönerek tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.

CEVAP ANAHTARI

Sayfa No	ÖLÇME ADI	11.1. TRİGONOMETRİ
28	ALIŞTIRMALAR	**1.** a) $72°4'12''$ b) $24°39'48''$ **2.** $35°45'8''$ **3.** $123°34'21''$ **4.** $\frac{7\pi}{4}$ **5.** $\frac{2\pi}{9}$, $108°$, $-\frac{4\pi}{3}$, $-675°$, 4π **6.** a) 350 b) 200 c) 150 **7.** a) 108 b) 240 c) 120 **8.** $\frac{7\pi}{8}$
58	ALIŞTIRMALAR	**1.** 8 **2.** $-, -, -, +$ **3.** $+, -, -$ **4.** 22 **5.** $-\frac{1}{5}$ **6.** $-8 \cdot \sin x$ **7.** $\frac{4}{5}$ **8.** 14 **9.** sinx **10.** $b < a < c$ **11.** -1 **12.** $-\sqrt{2}/2$
63	ALIŞTIRMALAR	**1.** $2\sqrt{10}$ **2.** $2\sqrt{19}$ **3.** $\frac{33}{65}$ **4.** $2\sqrt{17}$ **5.** 120 **6.** $\frac{7}{9}$
68	ALIŞTIRMALAR	**1.** $300\sqrt{2}$ **2.** $\frac{3}{10}$ **3.** 90 **4.** 15 **5.** $\frac{4}{5}$ **6.** $\frac{3}{8}$
81	ALIŞTIRMALAR	**1.** $\frac{2\pi}{3}$ **2.** $\frac{2\pi}{7}$ **3.** $\frac{\pi}{6}$ **4.** $\frac{\pi}{4}$ **5.** $\frac{\pi}{2}$ **6.** 9π **7.** f(x) tek fonksiyon, g(x) çift fonksiyon **8.** f(x) tek fonksiyon, g(x) tek fonksiyon
88	ALIŞTIRMALAR	**1.** $\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **2.** $\frac{\pi}{3}$ **3.** $\frac{3\pi}{4}$ **4.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **5.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **7.** $\frac{12}{13}$ **8.** $-\frac{\pi}{6}$ **9.** 0
89	ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 1	**1.** negatif **2.** 3600 **3.** f, e, b, d **4.** b, c, d, e **5.** $9°50'20''$ **6.** $\frac{7\pi}{4}$ **7.** $150°$ **8.** $77°14'08''$ **9.** $170°$ **10.** $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ **11.** $\sqrt{3}$ **12.** C **13.** C **14.** C
91	ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 2	**1.** $[-1, 1]$ **2.** -5 **3.** 1 **4.** b, d, e, f **5.** e, d, b, ç **6.** $+, -, +$ **7.** $c < a < b < d$ **8.** 2 **9.** 2 **10.** $\frac{4}{3}$ **11.** $-\frac{3}{5}$ **12.** $\frac{3}{5}$ **13.** B **14.** E **15.** B **16.** E **17.** C **18.** D **19.** D **20.** B **21.** A **22.** B **23.** E **24.** E **25.** C
94	ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 3	**1.** 1 **2.** $\frac{1}{5}$ **3.** -2 **4.** $\frac{3}{2}$ **5.** 29,4 cm **6.** 14,7 cm **7.** $\frac{12}{13}$ **8.** 5 **9.** $-\frac{3}{5}$ **10.** B **11.** C **12.** D **13.** B **14.** D **15.** C **16.** A **17.** B
97	ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 4	**1.** d, a, c, e **2.** c, e, ç, d **3.** $\frac{\pi}{6}$ **4.** $\frac{\pi}{2}$ **5.** $\frac{1}{3}$ **6.** $f^{-1}(x) = \frac{\sin(\frac{x}{2}) + 1}{3}$ **7.** $-\frac{\pi}{2}$ **8.** C **9.** D **10.** E **11.** E **12.** C **13.** A **14.** B

Sayfa No	ÖLÇME ADI	11.2. ANALİTİK GEOMETRİ
107	ALIŞTIRMALAR	**1.** $(k = 2, m = -2)$ **2.** $(-3, 8)$ **3.** 4 **4.** 4 **5.** $\frac{7}{4}$ **6.** $2\sqrt{5} + 2\sqrt{10}$
113	ALIŞTIRMALAR	**1.** C(2, 0) **2.** $\sqrt{26}$ **3.** $\sqrt{10}$ **4.** 140 **5.** $3\sqrt{5}$
132	ALIŞTIRMALAR	**1.** a) 2 b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{15}{2}$ **2.** -1 **3.** $\frac{3}{5}$ **4.** $105°$ **5.** 7 **6.** $\frac{7}{3}$ **7.** $\left(\frac{5}{2}, \frac{-3}{4}\right)$ **8.** $\frac{16}{3}$ **9.** $3y + x - 13 = 0$ **10.** $y - x + 1 = 0$ **11.** 9 **12.** $5x + 2y = 0$
135	ALIŞTIRMALAR	**1.** 6 **2.** $\frac{32}{5}$ **3.** $(42, 16)$ **4.** -10 **5.** 1
136	ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 1	**1.** dik koordinat sistemi **2.** 3 **3.** IV **4.** (1, 4) **5.** (2, 2) **6.** b, ç, d **7.** 7 **8.** 9 **9.** -80 **10.** B **11.** A **12.** B **13.** D **14.** B **15.** D **16.** $(1, 3)$ **17.** 1 **18.** $\left(3, \frac{15}{2}\right)$
138	ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 2	**1.** -1 **2.** eşit **3.** bir **4.** eğim açısı **5.** c, b, d, ç **6.** 13 **7.** 1 **8.** 5 **9.** 48 **10.** 30 **11.** $\frac{71}{2}$ **12.** E **13.** E **14.** D **15.** C **16.** A **17.** B **18.** D **19.** E

Sayfa No	ÖLÇME ADI	11.3. FONKSİYONLARDA UYGULAMALAR
156	ALIŞTIRMALAR	**1.** a) $(2, 0), (0, 4)$ b) $(-3, 0), (2, 0), (0, -6)$ **2.** -56 **3.** a) $(-\infty, 3)$ aralığında azalan, $(3, \infty)$ aralığında artan b) $(1, \infty)$ aralığında azalan, $(-\infty, 1)$ aralığında artan c) Sürekli artan **4.** a) $(-9, -5)$ aralığında artan, $(-5, 1)$ aralığında sabit b) $(-5, 1)$ aralığında sabit, $(1, 10)$ aralığında azalan c) Maksimum: $(-14, 4)$, Minimum: $(10, -7)$ **5.** 3
176	ALIŞTIRMALAR	**1.** $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$, $(-2, 22)$ **2.** 3 **3.** 4 **4.** -9 **5.** -11 **6.** 2 **7.** $(3, 0), (4, 0), (0, 12)$ **8.** 3 **9.** 12 **10.** (-12) **11.** I. Doğru II. Doğru III. Yanlış **12.** 5 **13.** $[-9, 2]$ **14.** I. Doğru II. Doğru III. Yanlış **15.** $f(x) = -3(x-1)^2 + 5$ **16.** kesişmez
180	ALIŞTIRMALAR	**1.** 24 **2.** 900 **3.** 80 000
191	ALIŞTIRMALAR	**1.** $\frac{-14}{3}$ **2.** 26 **3.** a. $(3, 2)$ b. $(5, 4)$ c. $(3, 8)$ ç. $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$
192	ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 1	**1.** Artan **2.** Azalan **3.** a, ç, b, d **4.** Pozitif: $(6, \infty)$, Negatif: $(-\infty, 6)$ **5.** f, R de artan ve g, R de azalan **6.** 2 **7.** $(-7, 2)$ **8.** $(0, -2)$ **9.** $[-8, -5] \cup [7, 10]$ **10.** -63 **11.** $-\frac{4}{3}$ **12.** A **13.** D **14.** B
194	ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 2	**1.** parabol **2.** simetri ekseni **3.** yukarı **4.** 2 **5.** teğet **6.** c, d, e, b **7.** -2 **8.** 27 **9.** -13 **10.** -2 **11.** $y = -x^2 + 4x + 5$ **12.** 10 **13.** $\sqrt{85}$ **14.** E **15.** C **16.** C **17.** D **18.** E **19.** B **20.** B **21.** A **22.** D **23.** A **24.** B
197	ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 3	**1.** y **2.** orijine **3.** a, ç, c **4.** 5 **5.** -4 **6.** $x = 0$ **7.** 84 **8.** $(-\infty, 0)$ **9.** En büyük değer: 40, En küçük değer: 8 **10.** B **11.** A **12.** D **13.** E

Sayfa No	ÖLÇME ADI	11.4. DENKLEM VE EŞİTSİZLİK SİSTEMLERİ
207	ALIŞTIRMALAR	**1.** $\left\{(-\frac{1}{2}, 8), (8, -\frac{1}{2}\right\}$ **2.** $\{(4, 2)\}$ **3.** $\left\{(2, \frac{1}{2}), (-2, -\frac{1}{2})\right\}$ **4.** $\left\{(3, 4), (-\frac{3}{4}, \frac{1}{4})\right\}$ **5.** $\{(1, -1), (-6, 6)\}$ **6.** $\left\{\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)\right\}$ **7.** $\varnothing$ **8.** $2\sqrt{5}$
220	ALIŞTIRMALAR	**1.** 3 **2.** $(-\infty, -7) \cup (0, 6) \cup (7, \infty)$ **3.** $[b, \infty)$ **4.** 6 **5.** 18 **6.** $(-2, 5)$ **7.** $\left[\frac{1}{2}, 1\right] \cup [3, \infty)$ **8.** $(-3, 9)$ **9.** $[-4, \infty) - \{0, 4, 5\}$ **10.** $[-6, 0)$ **11.** $(0, a)$
224	ALIŞTIRMALAR	**1.** $\left(\frac{9}{2}, 9\right)$ **2.** $(3, 20]$ **3.** $[10, \infty)$ **4.** 9 **5.** $(-4, 4)$ **6.** $[0, 5) \cup (7, \infty)$ **7.** a)4, b)26
225	ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME	**1.** $\varnothing$ **2.** a **3.** $\triangle < 0, a < 0$ **4.** $(2, 12), (-2, 12)$ **5.** $(4, \sqrt{3}), (4, -\sqrt{3})$ **6.** $(-3, -1] \cup (3, 5]$ **7.** 2007 **8.** 2002, 2003, 2004, 2005 **9.** C **10.** C **11.** B **12.** B **13.** E **14.** C **15.** D **16.** A

Sayfa No	ÖLÇME ADI	11.5. ÇEMBER VE DAİRE
238	ALIŞTIRMALAR	**1.** **2.** 10 **3.** 14 **4.** $\sqrt{65}$ **5.** 5 **6.** 2
252	ALIŞTIRMALAR	**1.** 115 **2.** 45 **3.** 60 **4.** 20 **5.** 40 **6.** 120 **7.** 65 **8.** 24 **9.** 60 **10.** 8 **11.** 50 **12.** 45
264	ALIŞTIRMALAR	**1.** 70 **2.** $8\sqrt{3}-12$ **3.** $2\sqrt{3}$ **4.** 3 **5.** $\frac{1}{2}$ **6.** 2 **7.** 3 **8.** 9 **9.** 16 **10.** 36 **11.** $\frac{8}{3}$ **12.** $2\sqrt{5}$
276	ALIŞTIRMALAR	**1.** 25π **2.** 256π **3.** $48\sqrt{3}-18\pi$ **4.** 1 **5.** $625\pi-672$ **6.** $\frac{3}{7}$ **7.** $78-18\pi$ **8.** $12\pi-9\sqrt{3}$ **9.** 12π **10.** $25\pi-48$ **11.** $16+8\pi$ **12.** $8\pi-25$
278	ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 1	**1.** çember **2.**teğet **3.** 2 katına **4.** 70 **5.** 30 **6.** D **7.** E **8.** A **9.** B **10.** E **11.** C **12.** B **13.** C **14.** A **15.** C **16.** B **17.**B **18.** D
281	ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 2	**1.** eşit **2.** orta **3.** iç teğet **4.** 8 **5.** $\sqrt{41}$ **6.** 4 **7.** 13 **8.** $4\sqrt{5}$ **9.** C **10.** E **11.** B **12.** B **13.** E **14.** C **15.** D **16.** B **17.** B **18.** E
284	ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 3	**1.** $2\pi r$ **2.** πr^2 **3.** 32π **4.** 12π **5.** 32π **6.** $\sqrt{2}$ **7.** 380 m^3 **8.** C **9.** D **10.** A **11.** B **12.** C **13.** C **14.** D **15.** B **16.** A

Sayfa No	ÖLÇME ADI	11.6. UZAY GEOMETRİ
310	ALIŞTIRMALAR	**1.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **2.** 20π m **3.** 2772π **4.** $\frac{6}{\pi}$ **5.** 4 **6.** 1000 Türk Lirası **7.** 8π **8.** 66π **9.** $\frac{2}{\sqrt[3]{7}}$ **10.** 45 **11.** 21 **12.** 6π **13.** 14,4 cm **14.** 32π **15.** $\frac{4}{3}$
313	ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME	**1.** silindir **2.** dik dairesel silindir **3.** daire **4.** $\frac{54}{125}$ **5.** 28 800 **6.** 3800 **7.** 21 **8.** 25 **9.** 7 **10.** A **11.** D **12.** C **13.** D **14.** A **15.** E **16.** A **17.** C **18.** B **19.** C

Sayfa No	ÖLÇME ADI	11.7. OLASILIK
324	ALIŞTIRMALAR	**1.** $\frac{3}{5}$ **2.** $\frac{1}{2}$ **3.** $\frac{3}{10}$ **4.** $\frac{5}{8}$ **5.** $\frac{1}{16}$ **6.** $\frac{8}{11}$ **7.** $\frac{1}{2}$
330	ALIŞTIRMALAR	**1.** $\frac{1}{6}$ **2.** $\frac{1}{5}$ **3.** $\frac{1}{12}$ **4.** $\frac{9}{25}$ **5.** $\frac{5}{18}$ **6.** $\frac{1}{3}$
336	ALIŞTIRMALAR	**1.** $\frac{28}{95}$ **2.** $\frac{13}{16}$ **3.** $\frac{2}{3}$ **4.** $\frac{3}{4}$ **5.** $\frac{3}{5}$ **6.** $\frac{4}{15}$ **7.** $\frac{25}{49}$
340	ALIŞTIRMALAR	**1.** $\frac{3}{5}$ **2.** $\frac{3}{16}$ **3.**125 **4.** 25
341	ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME	**1.** koşullu olasılık **2.** bağımlı **3.** $P(A)\cdot P(B)$ **4.** $\frac{1}{3}$ **5.** $\frac{2}{5}$ **6.** $1-\frac{1}{50^3}$ **7.** $\frac{5}{9}$ **8.** $\frac{32}{33}$ **9.** $\frac{22}{25}$ **10.** $\frac{21}{40}$ **11.** $\frac{12}{59}$ **12.** A **13.** D **14.** C **15.** E **16.** B **17.** D **18.** B **19.** A **20.** D **21.** D **22.** D **23.** E **24.** A

SÖZLÜK

A

açı	:	Başlangıç noktaları ortak olan iki ışının birleşimi.
alan	:	Bir bölgenin düzlemde kapladığı yer.
analitik düzlem	:	Dik koordinat sisteminin belirttiği düzlem.
apsis	:	Biri yatay biri dikey iki doğrunun dik kesişimi ile oluşan koordinat sisteminin yatay ekseni (x ekseni) dir.
aralık	:	Gerçek iki sayı arasındaki tüm sayıları kapsayan küme.

B

birim	:	Bir nicelikte temel olarak alınan değer.
birim çember	:	Merkezi, orijinde bulunan ve yarıçapı 1 birim olan çember.
birimkare	:	Bir kenar uzunluğu bir birim olan karesel bölge.
boş küme	:	Hiç elemanı olmayan küme.

C - Ç

çevre açı	:	Bir çokgenin kenar uzunlukları toplamı.
çift fonksiyon	:	Grafiği y eksenine göre simetrik olan fonksiyon.
çözüm kümesi	:	Bir denklem veya eşitsizliği sağlayan elemanların oluşturduğu küme.

D

değer kümesi	:	A'dan B'ye tanımlanmış bir fonksiyonda B kümesine verilen ad.
deney	:	Sonuçları belirlenebilen olay.
denklem sistemi	:	En az iki denklemin meydana getirdiği sistem.
derece	:	Bir çemberin 360 parçasından 1 parçasını gören merkez açının ölçüsü.
dik dairesel koni	:	Tabanı daire olan dik koni.
dik dairesel silindir	:	Alt ve üst tabanları daire olan dik silindir.
dış teğet çember	:	Bir üçgenin iki dış açıortayının kesişim noktasını merkez alan, yarı çapı bir kenara dik uzaklık olarak alınan çember.
doğru parçası	:	Bir doğrunun herhangi bir parçası.
dönme	:	Şeklin bir nokta etrafında saat yönünde ya da saat yönünün tersi yönde döndürülmesi.
dönüşüm	:	Dönme, öteleme ve yansıma gibi işlemler.
dönme açısı		Bir şeklin dönme merkezi etrafında döndürüldüğü açı.
düzgün piramit	:	Tabanı düzgün çokgensel bölge ve yan yüzleri birbirine eş ikizkenar üçgen olan cisim.

E

eğim	:	Bir doğrunun grafiğinin x ekseniyle pozitif yönde yaptığı açının tanjantı.
eğim açısı	:	Bir doğrunun grafiğinin x ekseniyle pozitif yönde yaptığı açı.
esas ölçü	:	0 ile 360 derece arasında olan açı ya da yay ölçüsü.
eşitsizlik sistemi	:	En az iki eşitsizliğin meydana getirdiği sistem.

G

görüntü kümesi	:	Bir fonksiyonun görüntülerinden oluşan küme.

I - İ

iç açıortay : Bir üçgenin herhangi bir iç açısını iki eş parçaya ayıran ve üçgen içerisinde karşı kenarı kestiği nokta ile köşeyi birleştiren doğru parçası.

iç teğet çember : Herhangi bir üçgende iç açıortayların kesiştiği nokta merkez olmak üzere, yarıçapı bir kenara dik uzaklık olarak çizilen çember.

K

kesen : Çemberi iki noktada kesen doğru.

kiriş : Çemberin iki noktasını birleştiren doğru parçası.

küre yüzeyi : Bir noktadan sabit uzaklıktaki noktalar kümesi.

M - N

merkez açı : Köşesi çemberin merkezinde olan ve ışınları çemberi diğer iki noktada kesen açı.

negatif yön : Saatin dönme yönü.

O - Ö

olasılık : Bir olayın olabilirlik derecesinin 0 ile 1 arasındaki (0 ile 1 dahil) bir gerçek sayıyla gösterilmiş biçimi.

olay : Örnek uzayın her bir alt kümesi.

ordinat : Biri yatay biri dikey iki doğrunun dik kesişimi ile oluşan koordinat sisteminin dikey ekseni (y ekseni) dir.

orta dikme : Bir doğru parçasının uç noktalarına eşit uzaklıkta bulunan noktalar kümesi.

orta nokta : Bir doğru parçasının uç noktalarına eşit uzaklıkta bulunan noktası.

örnek uzay : Bir deneyin olabilir tüm sonuçlarının oluşturduğu küme.

öteleme : Bir şeklin duruşu ve boyutu değiştirilmeden sağa, sola, yukarı ve aşağı kaydırılması.

P

parabol : İkinci dereceden bir fonksiyonun grafiği.

pozitif yön : Saat dönme yönünün tersi.

S

sıralı ikili : İki kümenin kartezyen kümesinin her bir elemanı.

simetri ekseni : Düzlemsel bir şekli iki parçaya ayıran ve şekil etrafında katlandığında iki parçanın üst üste çakıştığı doğru.

T

tanım kümesi : Bir fonksiyonun tanımlı olduğu küme.

teğet : Çembere bir noktada değen doğru.

U - Ü

uzaklık : İki noktayı birleştiren doğru parçasının uzunluğu.

üçgenin çevrel çemberi : Herhangi bir üçgenin kenar orta dikmelerinin kesişim noktası merkez olacak şekilde, yarıçapı üçgenin köşelerine uzaklığı olan çember.

Y

yansıma : Bir şeklin doğruya göre simetriği.

KAYNAKÇA

Boyer, C. B. (2015). *Matematiğin tarihi, İsaac Asimov'un önsözüyle.* (Saadet Bağcacı, Çev.). Ankara: Doruk Yayınları (Orijinal çalışma 1994'te yayımlanmıştır.).
Milli Eğitim Bakanlığı (2018)*. Ortaöğretim Matematik Dersi (9, 10, 11 ve 12. Sınıflar) Öğretim Programı.*

GENEL AĞ KAYNAKÇASI

https://sozluk.gov.tr/ (Türk Dil Kurumu Türkçe sözlük, erişim: 12.06.2023, 10.50)
https://www.tdk.gov.tr/kategori/icerik/yazim-kurallari/ (Türk Dil Kurumu Türkçe sözlük, erişim: 12.06.2023, 10.52)

GÖRSEL KAYNAKÇA

www.shutterstock.com (Telif hakkı ödenerek satın alınmıştır.)
www.dreamstime.com (Telif hakkı ödenerek satın alınmıştır.)
Komisyonumuzun görsel tasarım uzmanlarının orijinal çizimleri.

Kaynakça APA 7 formatına göre düzenlenmiştir.

TÜRKİYE HARİTASI